

Skript zu:
Einführung in die Algebra I WS 99/00

Vogt

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorräume und lineare Abbildungen	13
1.1	Lineare Gleichungssysteme	14
1.1.1	Teilebedarfsrechnung	14
1.1.2		14
1.1.3		14
1.1.4	Leistungsverrechnung in einem System	14
1.1.5	Definition: Lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge, Homogen, Inhomogen	14
1.1.6	Erlaubte Manipulationen	14
1.1.7	Lösungsverfahren	14
1.1.8	Dreiecksform	14
1.1.9		14
1.1.10	Lösbarkeitskriterium	14
1.1.11		14
1.1.12	Vereinfachung der Dreiecksform	14
1.1.13	Reduziertes System	14
1.1.14		14
1.1.15	Rechenbeispiel	14
1.1.16		14
1.2	Der Begriff des Körpers	15
1.2.1	Definition: Körper	15
1.2.2	Bemerkung	16
1.2.3	Logische Zeichen	16
1.2.4	Warnung	16
1.2.5	Folgerung aus den Axiomen 1.2.1 und Bezeichnungen	16
1.2.6	Bezeichnungen	16
1.2.7	Rechenregeln	16
1.2.8	Beispiele	16
1.2.9	Beispiel	16
1.2.10	Beispiel: Der Körper der komplexen Zahlen	16
1.2.11	Definition: Unterkörper, Körpererweiterung	16
1.2.12	Beispiel: $\mathbb{R}$ kann als Unterkörper von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden	16
1.2.13	Bezeichnungen	16
1.2.14		16
1.2.15	Addition	16
1.2.16	Polarkoordinaten	16
1.3	Ergänzung: Mengen und Abbildungen	17
1.3.1	Bezeichnungen	18

1.3.2	Definition: Teilmenge	18
1.3.3	Mengengesetze	18
1.3.4	Definition: Vereinigung, Durchschnitt	18
1.3.5	Distributivgesetze	18
1.3.6	Definition: Differenzmenge	18
1.3.7	de Morgansche Regeln	18
1.3.8	Definition: Disjunkt, Disjunkte Vereinigung	18
1.3.9	Mengengesetze	18
1.3.10	Definition: Kartesisches Produkt	18
1.3.11	Definition: Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich	18
1.3.12	Definition und Satz	18
1.3.13	Definition: Bild, Urbildmenge	18
1.3.14	Beispiel	18
1.3.15	Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv	18
1.3.16	Definition: Umkehrabbildung	18
1.3.17	Definition: Komposition, Identität	18
1.3.18		18
1.3.19		18
1.3.20	Satz	18
1.3.21	Bezeichnung: Links- Rechtsinvers	18
1.3.22		18
1.3.23	Folgerung	18
1.3.24	Satz	18
1.4	Vektorräume	19
1.4.1	Lineares Gleichungssystem	19
1.4.2	Das homogene System	19
1.4.3	Satz	19
1.4.4	Superpositionsprinzip	19
1.4.5	Definition: Summenzeichen	19
1.4.6	Rechenregeln für das Summenzeichen	20
1.4.7		21
1.4.8	Satz	21
1.4.9	Bezeichnungen	21
1.4.10	Definition	21
1.4.11		22
1.4.12	Rechenregeln	22
1.4.13	Definition: Vektorraum	23
1.4.14	Bemerkung	24
1.4.15	Beispiel	24
1.4.16	Beispiel	24
1.4.17	Folgerung aus den Axiomen	25
1.4.18	Definition: Untervektorraum	25
1.4.19		25
1.4.20	Beispiel	26
1.4.21	Satz	26
1.4.22	Definition: Span	26
1.4.23		26
1.4.24	Beispiel	27
1.4.25	Definition: Erzeugendensystem, Endlich Erzeugt	27
1.4.26	Satz	27

1.4.27	Bezeichnung: Linearkombination	27
1.4.28	Beispiel	28
1.4.29	Definition: Summe, Direkte Summe	28
1.4.30	Satz	29
1.4.31	Beispiel	29
1.4.32	Definition und Satz	30
1.4.33		30
1.5	Basis und Dimension	31
1.5.1	Definition: Linear Unabhängig, Linear Abhängig	31
1.5.2		31
1.5.3	Definition: Basis	31
1.5.4	Satz	31
1.5.5	Definition: Dimension	32
1.5.6	Satz	32
1.5.7	Satz: Basisergänzungssatz	32
1.5.8	Satz: Basisauswahlsatz	33
1.5.9	Satz: Basisaustauschsatz	33
1.5.10	Satz	34
1.5.11	Beispiel: Die Standardbasis	34
1.5.12	Test auf lineare Unabhängigkeit	35
1.5.13	Geometrische Interpretation der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems	35
1.5.14		36
1.5.15		37
1.5.16	Definition: Affiner Unterraum	37
1.5.17		37
1.5.18	Finden einer Basis eines Untervektorraums	37
1.5.19	Lemma	37
1.5.20	Satz	38
1.5.21	Satz	38
1.5.22	Ergänzung: Das Induktionsprinzip	38
1.6	Lineare Abbildungen	40
1.6.1	Mathematisches Grundprinzip	40
1.6.2	Definition: Lineare Abbildung	40
1.6.3	Einfache Eigenschaften	40
1.6.4	Lemma	41
1.6.5	Definition: Isomorphismus	41
1.6.6	Mathematisches Grundprinzip	41
1.6.7	Satz: Linearer Isomorphismus	41
1.6.8	Satz und Definition: Kern, Bild	42
1.6.9	Satz	42
1.6.10	Satz: Kriterium für Injektivität eine linearen Abbildung	42
1.6.11	Satz	43
1.6.12	Definition: Rang und Corang	43
1.6.13	Satz	43
1.6.14	Folgerung	44
1.6.15	Satz	44
1.6.16		45
1.6.17	Satz	45
1.6.18	Satz	45

1.6.19	Bezeichnung	45
1.6.20	Satz	46
1.6.21		46
1.6.22	Warnung	47
1.6.23	Definition: Linearer Endomorphismus	47
1.6.24	Satz	47
1.6.25	Definition: Ring	47
1.6.26	Definition: Rechts- oder Linksinvers	48
1.6.27	Lemma	48
1.6.28	Satz	48
1.7	Matrizen	49
1.7.1		49
1.7.2	Matrix über $\mathbb{K}$	49
1.7.3	Warnung	49
1.7.4	Bezeichnung	49
1.7.5		50
1.7.6	Satz	50
1.7.7	Definition: Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation von Matrizen	51
1.7.8		51
1.7.9	Beispiel: Matrizenmultiplikation	51
1.7.10	Beispiel	52
1.7.11	Aufgabe	52
1.7.12	Allgemeiner Fall	53
1.7.13	Konvention	53
1.7.14	Spezialfall	53
1.7.15		53
1.7.16	Satz	54
1.7.17	Warnung	54
1.7.18	Rechenregeln für Matrizen	54
1.7.19	Definition: Links- Rechtsinvers	54
1.7.20	Satz	55
1.7.21	Definition: Rang einer Matrix	55
1.7.22		55
1.7.23	Satz	55
1.8	Grundlagen: Äquivalenzrelationen	56
1.8.1	Definition: Relation	56
1.8.2	Beispiel	56
1.8.3	Definition: Äquivalenzrelation, Repräsentant	56
1.8.4	Beispiel	56
1.8.5	Satz	56
1.9	Quotienten- und Dualräume	58
1.9.1	Definition	58
1.9.2		58
1.9.3	Definition	58
1.9.4		58
1.9.5	Satz und Definition	59
1.9.6	Ergänzung	60
1.9.7	Satz	60
1.9.8	Satz	61

1.9.9	Folgerung	61
1.9.10	Definition: Dualraum, Linearform, Duale Abbildung	61
1.9.11	Beispiel	62
1.9.12	Funktionelle Eigenschaften	62
1.9.13		63
1.9.14	Satz und Definition	63
1.9.15	Bezeichnung: Kronecker-Symbol	63
1.9.16	Bemerkung	63
1.9.17	Definition: Transponierte Matrix	64
1.9.18	Satz	64
1.9.19	Beispiel	64
1.9.20	Lemma	64
1.9.21	Aufgabe	65
1.9.22	Satz	65
1.9.23	Folgerung	65
1.9.24	Folgerung	66
1.9.25	Aufgabe	66
1.9.26	Definition: Bidualraum	66
1.9.27	Satz	67
1.9.28	Ergänzung	67
1.9.29	Aufgabe	68
1.10	Ergänzung zu linearen Gleichungssystemen	69
1.10.1		69
1.10.2		69
1.10.3		69
1.10.4	Definition: Erweiterte Matrix	69
1.10.5	Satz	70
1.10.6	Definition: Kodimension, Hyperebene	70
1.10.7	Bemerkung	70
1.10.8	Satz	71
1.10.9	Beispiel	71
1.10.10	Satz	72
1.10.11	Definition: Allgemeine Lage	72
1.10.12	Bemerkung	72
1.10.13	Beispiel	73
1.10.14	Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung	73
1.10.15		73
1.10.16		74
1.10.17	Satz	74
1.11	Determinanten	75
1.11.1	Vermutung	76
1.11.2	Aufgabe	76
1.11.3	Bezeichnung: Volumen eines Parallelotops	76
1.11.4	Gewünschte Eigenschaften von $D(v^1, \dots, v^n)$	76
1.11.5	Definition: Orientierte Volumenfunktion, Determinante	77
1.11.6	Definition: Multilinear, Multilinearform	78
1.11.7	Satz: Eindeutigkeit der Determinante	78
1.11.8	Satz	78
1.11.9	Definition: Alternierende multilineare Abbildung	79
1.11.10	Lemma	79

1.11.11	80
1.11.12 Definition: Permutation	80
1.11.13 Bezeichnung: Vorzeichen einer Permutation	80
1.11.14 Satz	80
1.11.15 Satz	80
1.11.16 Bezeichnung	81
1.11.17	81
1.11.18 Bezeichnung	81
1.11.19 Bezeichnung: Entwicklung nach der j -ten Spalte	81
1.11.20 Bemerkung	81
1.11.21 Beispiel	82
1.11.22 Beispiel	82
1.11.23 Bezeichnung	82
1.11.24 Aufgabe	83
1.11.25 Lemma	83
1.11.26	83
1.11.27 Satz	83
1.11.28 Folgerung: Entwicklung nach der i -ten Zeile	84
1.11.29 Satz	84
1.11.30 Satz	84
1.11.31 Lemma	84
1.11.32 Definition: Adjungierte Matrix	85
1.11.33 Satz	85
1.11.34 Aufgabe	85
1.11.35 Cramer'sche Regel	86
1.11.36 Beispiel: Berechnung einer Determinante	86
1.11.37 Vandermondsche Determinante	86
2 Lineare Endomorphismen	87
2.12 Eigenwerte und Eigenvektoren	88
2.12.1 Definition: Invariant	88
2.12.2 Beispiel	88
2.12.3 Satz	89
2.12.4 Definition: Komplementärraum	89
2.12.5 Warnung	89
2.12.6 Satz	89
2.12.7 Definition: Diagonalisierbar	90
2.12.8 Satz	90
2.12.9 Beispiel	90
2.12.10 Definition: Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum	90
2.12.11 Erste Beobachtungen	91
2.12.12 Beispiel	91
2.12.13 Satz	91
2.12.14 Lemma	92
2.12.15 Definition: Charakteristisches Polynom, Spur	92
2.12.16 Lemma	92
2.12.17 Satz	93
2.12.18 Beispiel	93
2.12.19 Beispiel	93
2.12.20 Definition: Linearfaktor	94

2.12.21 Lemma	94
2.12.22 Satz	94
2.12.23 Korollar	94
2.13 Polynomringe	95
2.13.1 Beispiel	95
2.13.2 Definition: Polynom, Koeffizientenfolge, Grad	95
2.13.3 Addition und Multiplikation	95
2.13.4 Satz	96
2.13.5 Bezeichnung: Leitkoeffizient, Konstanter Term	96
2.13.6	96
2.13.7	96
2.13.8 Division mit Rest	96
2.13.9 Definition: Nullstelle	97
2.13.10 Satz	97
2.13.11 Folgerung	97
2.13.12 Satz: Fundamentalsatz der Algebra	98
2.14 Trigonalisierbare Endomorphismen	99
2.14.1 Beispiel	99
2.14.2 Definition: Trigonalisierbar	99
2.14.3 Satz	99
2.14.4 Satz	99
2.14.5 Definition: Fahne, f -Invariant	99
2.14.6 Satz: Fahnensatz	100
3 Vektorräume mit Skalarprodukt	101
3.15 Skalarprodukte	102
3.15.1 Satz: Satz des Pythagoras	102
3.15.2	102
3.15.3 Definition: Euklidische- oder Standardskalarprodukt	103
3.15.4 Rechenregeln	103
3.15.5 Konvention	103
3.15.6 Definition: Bilinearform, symmetrisch	103
3.15.7 Definition: Sesquilinearform, Semilinear, Hermitesch	103
3.15.8	104
3.15.9 Definition: Positiv definit, Euklidischer- oder Unitärer Vektorraum	104
3.15.10 Beispiele	104
3.15.11 Satz	105
3.15.12 Definition: Norm, Normierter Vektorraum	105
3.15.13	105
3.15.14 Satz	105
3.15.15 Definition: Abstand zweier Vektoren	106
3.15.16 Rechenregeln für den Abstand	106
3.15.17 Definition: Winkelmass	107
3.15.18 Definition: Orthogonal, Orthogonales Komplement	107
3.15.19 Satz	107
3.15.20 Definition: Orthogonal- und Orthonormalsystem, Orthogonal- und Orthonormalbasis	108
3.15.21 Beispiel	108
3.15.22 Der Gram-Schmidt Orthogonalisierungsprozess	108

3.15.23 Satz	109
3.15.24 Definition: Orthogonale Projektion	109
3.15.25 Lemma	109
3.15.26 Satz: Satz des Pythagoras	110
3.15.27 Bessel'sche Ungleichung	111
3.15.28 Definition: Abstand von einem Vektor zu einem Untervektorraum	111
3.15.29 Satz	111
3.15.30 Methode der kleinsten Quadrate	112
3.16 Bilinearformen und Matrizen	113
3.16.1	113
3.16.2	113
3.16.3 Satz	113
3.16.4	114
3.16.5 Satz	114
3.16.6 Transformationsformel	115
3.16.7 Folgerung	115
3.16.8 Definition: Positiv Definit	115
3.16.9 Satz: Hauptminorenkriterium	115
3.16.10 Satz	117
3.16.11 Satz	117
3.16.12 Die Hauptachsentransformation	118
3.16.13 Ergänzung	119
3.16.14 Folgerung	119
3.17 Orthogonale und unitäre Abbildungen	120
3.17.1 Definition: isometrisch, Isometrie	120
3.17.2 Satz	120
3.17.3 Folgerung	120
3.17.4 Satz	120
3.17.5 Lemma	120
3.17.6 Satz	120
3.17.7 Definition: Unitär, Orthogonal	120
3.17.8 Definition: Unitäre Matrix, Orthogonale Matrix	120
3.17.9 Satz	120
3.17.10 Lemma	120
3.17.11 Lemma	120
3.17.12 Satz	120
3.17.13	120
3.17.14 Satz	120
3.17.15	120
3.17.16 Definition: Gruppe, Abelsch, Kommutativ	120
3.17.17 Satz	120
3.17.18 Weitere Beispiele	120
3.17.19 Satz und Definition	120

Zwei Meinungen zur Mathematik:

Aus Richard Courant: "Mathematik in der modernen Welt":

Kurz gesagt, die Mathematik muss ihre Motivation aus konkreter, spezifischer Substanz beziehen und bestrebt sein, wieder zu irgendeiner Schicht der Realität zurückzukehren. Der Flug in die Abstraktion muss etwas mehr als eine bloße Flucht sein; das Abheben vom Boden sowie das Wiederaufsetzen sind beide unerlässlich, selbst wenn nicht immer alle Phasen der Flugbahn von ein und demselben Piloten gesteuert werden können. Die Substanz für eine Unternehmung reinster mathematischer Natur kann oft aus der greifbaren physikalischen Realität stammen.

Aus Michael Otte: "Mathematiker über Mathematik":

Es scheint eine zentrale Bedeutung der Mathematik zu sein, dass sie viele wesentliche Probleme mit der nötigen Schärfe und Zuspitzung vorangebracht hat. Daher steht es dem Mathematiker niemals gut zu Gesicht, die Bedingungen, die gesellschaftlichen und gegenständlichen Beziehungen, die dafür die Voraussetzung waren und sind, zu ignorieren. Die Mathematik ist nicht eine von der Gesamtentwicklung der menschlichen Gesellschaft besonders unabhängige, sondern im Gegenteil eine mit der gesellschaftlichen Entwicklung besonders eng verbundene Wissenschaft, schon, weil die Bedeutung ihrer Symbole und Aussagen wegen ihrer Allgemeinheit und universellen Anwendbarkeit nicht ohne Beziehung zu den übrigen Bereichen menschlicher Tätigkeit zu erfassen ist. Mathematik ist wohl die Wissenschaft, in der der menschliche Erkenntnisprozess besonders deutlich als aktiver Vorgang, als konstruktiver Akt historisch in Erscheinung tritt.

In diesem Sinne wollen wir beginnen.

Kapitel 1

Vektorräume und lineare Abbildungen

Die lineare Algebra entstand aus der Behandlung linearer Gleichungssysteme.

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Eine Grundtechnik der linearen Algebra ist das Lösen linearer Gleichungssysteme. Die Lösungsmengen solcher Systeme und ihre Beziehungen zum Ausgangssystem sind Grundbausteine der linearen Algebra. Wir beginnen mit Beispielen.

1.1.1 Teilebedarfsrechnung

1.1.2

1.1.3

1.1.4 Leistungsverrechnung in einem System

1.1.5 Definition: Lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge, Homogen, Inhomogen

1.1.6 Erlaubte Manipulationen

1.1.7 Lösungsverfahren

1.1.8 Dreiecksform

1.1.9

1.1.10 Lösbarkeitskriterium

Das Gleichungssystem ?? hat genau dann eine Lösung, wenn in 1.1.8 gilt

$$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_m = 0$$

ist das Lösbarkeitskriterium erfüllt, erhalten wir die Gesamtlösung durch sukzessives einsetzen.

1.1.11

1.1.12 Vereinfachung der Dreiecksform

1.1.13 Reduziertes System

1.1.14

1.1.15 Rechenbeispiel

1.1.16

1.2 Der Begriff des Körpers

Der Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme machte sich zu Nutze, dass man in $\mathbb{R}$ addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch Elemente $a \neq 0$ dividieren kann. Offensichtlich hätte das gleiche Verfahren auch für Gleichungssysteme mit rationalen Koeffizienten funktioniert, also über $\mathbb{Q}$. Was sind nun die formalen Eigenschaften der Addition und Multiplikation, die wir benutzt haben?

Dazu betrachten wir anstelle der Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ eine beliebige Menge $\mathbb{K}$. Wir fordern, dass auf $\mathbb{K}$ zwei Rechenoperationen, genannt “Addition” und “Multiplikation” definiert sind. Formal ausgedrückt, bedeutet das, dass wir zwei Abbildungen

$$\text{Addition: } \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y$$

$$\text{Multiplikation: } \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x * y$$

haben (zum Begriff “Abbildung” und zur Definition von $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ siehe Ergänzung zu diesem Paragraphen). Wir nennen $x + y$ die Summe und $x * y$ das Produkt von x und y .

Addition und Multiplikation sollen gewissen Regeln genügen, die wir in möglichst wenigen Axiomen fordern. Aus diesen Axiomen wollen wir dann allgemeinere Rechenregeln ableiten.

Diese Axiome sind dann Ausgangspunkt einer mathematischen Theorie, im vorliegenden Fall der Körpertheorie. Bei ihrer Entwicklung dürfen nur die vorgegebenen Axiome benutzt werden. Daher sollte man ein solches Axiomensystem erst nach gründlicher Kenntnis geeigneter Beispiele aufstellen.

Wir lassen uns von den Modellen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und den Rechenregeln leiten, die wir in 1.1 stillschweigend benutzt haben. Nach Aufstellung der Axiome werden wir sehen, dass es unendlich viele wesentlich verschiedene Körper gibt. Allen ist gemeinsam, dass man in ihnen wie in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ rechnen kann.

1.2.1 Definition: Körper

Ein Körper ist eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit einer

- Addition: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y$ und
- Multiplikation: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x * y$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 1.

1.2.2 Bemerkung

1.2.3 Logische Zeichen

1.2.4 Warnung

1.2.5 Folgerung aus den Axiomen 1.2.1 und Bezeichnungen

1.2.6 Bezeichnungen

1.2.7 Rechenregeln

1.2.8 Beispiele

1.2.9 Beispiel

1.2.10 Beispiel: Der Körper der komplexen Zahlen

1.2.11 Definition: Unterkörper, Körpererweiterung

1.2.12 Beispiel: $\mathbb{R}$ kann als Unterkörper von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden

1.2.13 Bezeichnungen

1.2.14

1.2.15 Addition

1.2.16 Polarkoordinaten

1.3 Ergänzung: Mengen und Abbildungen

Wir werden in dieser Vorlesung immer wieder auf Grundlagen zurückgreifen, die wir nicht erarbeitet haben. Diese werden als Ergänzungen in die Vorlesung eingeschoben, damit es für diese Grundlagen eine Motivation gibt. Für einen mehr systematischen Aufbau sei auf die Literatur hingewiesen.

Wir setzen den Begriff der Menge, als bekannt voraus. Sie ist so definiert, dass es klar ist, wann ein Element zu ihr gehört und wann nicht.

- 1.3.1 Bezeichnungen
- 1.3.2 Definition: Teilmenge
- 1.3.3 Mengengesetze
- 1.3.4 Definition: Vereinigung, Durchschnitt
- 1.3.5 Distributivgesetze
- 1.3.6 Definition: Differenzmenge
- 1.3.7 de Morgansche Regeln
- 1.3.8 Definition: Disjunkt, Disjunkte Vereinigung
- 1.3.9 Mengengesetze
- 1.3.10 Definition: Kartesisches Produkt
- 1.3.11 Definition: Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich
- 1.3.12 Definition und Satz
- 1.3.13 Definition: Bild, Urbildmenge
- 1.3.14 Beispiel
- 1.3.15 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv
- 1.3.16 Definition: Umkehrabbildung
- 1.3.17 Definition: Komposition, Identität
- 1.3.18
- 1.3.19
- 1.3.20 Satz
- 1.3.21 Bezeichnung: Links- Rechtsinvers
- 1.3.22
- 1.3.23 Folgerung
- 1.3.24 Satz

1.4 Vektorräume

Aus 1.1 und 1.2 wissen wir, dass wir mit dem Gauss-Schema lineare Gleichungssysteme über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$ lösen können. Nach einem Einschub über mathematische Grundlagen kehren wir zu der Betrachtung linearer Gleichungssysteme zurück. Gegeben sei also ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$.

1.4.1 Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, b_i \in \mathbb{K}$$

Dann ist

1.4.2 Das homogene System

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \dots & + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

das zugehörige homogene System.

Wir wissen, wie man solche Gleichungssysteme löst, haben aber keine Vorstellung darüber, was Lösbarkeit bedeutet, noch wie die Lösungsmenge aussieht. Vorstellung bedeutet hier das geometrische Bild der Lösungsmenge. Wir haben also weder den Begriff der Lösbarkeit noch die Lösungsmenge richtig verstanden. Für die Entwicklung einer Theorie der linearen Gleichungssysteme ist dieses Verständnis aber Voraussetzung.

Um hier weiter zu kommen untersuchen wir die Struktur der Lösungsmenge, eine für die Mathematik typische Vorgehensweise. Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge von 1.4.1.

1.4.3 Satz

Sei $(z_1, \dots, z_n)$ eine (spezielle) Lösung des Systems 1.4.1. Dann gilt:
 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{L} \iff$ es gibt eine Lösung $(y_1, \dots, y_n)$ des zugehörigen homogenen Systems, so dass $x_i = y_i + z_i, i = 1, \dots, n$

1.4.4 Superpositionsprinzip

Um die Lösungsmenge zu bestimmen müssen wir also eine spezielle Lösung des inhomogenen und alle Lösungen des zugehörigen homogenen Systems bestimmen.

Zur Vereinfachung der Notation benutzen wir:

1.4.5 Definition: Summenzeichen

$$\sum_{i=k}^n a_i \quad \text{bedeutet} \quad a_k + a_{k+1} + \dots + a_n, k \leq n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{bedeutet} \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

1.4.6 Rechenregeln für das Summenzeichen

1. Ausklammern

$$\sum_{i=k}^n c a_i = c \sum_{i=k}^n a_i$$

2. Umsummieren

$$\sum_{i=k}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^n a_i + \sum_{i=k}^n b_i$$

3. Zerlegung der Summe

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad , k \leq m < n$$

4. Umindizieren

$$\sum_{i=k}^m a_{i+l} = \sum_{j=k+l}^{m+l} a_j$$

5. Doppelsummenregel

$$\sum_{i=k}^m \sum_{j=l}^n a_{ij} = \sum_{j=l}^n \sum_{i=k}^m a_{ij}$$

Beweis 1.4.3

“ $\Rightarrow$ ” $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{L} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1, \dots, m$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = b_i \quad , i = 1, \dots, m$$

Mit $y_i = x_i - z_i$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - z_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = b_i - b_i = 0 \quad , i = 1, \dots, m$$

Also löst $(y_1, \dots, y_n)$ das homogene System.

“ $\Leftarrow$ ” Sei $(y_1, \dots, y_n)$ Lösung des homogenen Systems, d.h.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0 \quad , i = 1, \dots, m$$

Dann gilt für $x_i = y_i + z_i$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_j + z_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = 0 + b_i = b_i$$

Also ist $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{L}$

Das Gauss-Verfahren liefert uns sofort eine spezielle Lösung: Aus 1.1.14 folgern wir

1.4.7

Mit der Bezeichnungsweise aus dem reduzierten Schema 1.1.13 erhalten wir eine spezielle Lösung $(z_1, \dots, z_n)$ von 1.4.1, nämlich.

$$z_{q_i} = \begin{cases} b_i^* & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{für } i = r + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Nach 1.4.3 kommt der Lösungsmenge $\mathbb{L}^\circ$ des homogenen Gleichungssystems 1.4.2 besondere Bedeutung zu.

1.4.8 Satz

Sind $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ Lösungen des homogenen Systems 1.4.2, dann sind auch $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ und $(cx_1, \dots, cx_n)$ mit beliebigen $c \in \mathbb{K}$ Lösungen von 1.4.2.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für $i = 1, \dots, m$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0$$

Also

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j + y_j) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0 + 0 = 0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(cx_j) &= \sum_{j=1}^n ca_{ij}x_j = c \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = c \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

1.4.3 und 1.4.4 legen nun folgende Bezeichnungen und Rechenoperationen auf $\mathbb{K}^n$ nahe:

1.4.9 Bezeichnungen

Für ein n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ schreiben wir kürzer x , also $x = (x_1, \dots, x_n)$. Die Zahl $x_j \in \mathbb{K}$ heisst j -te Koordinate von x .

1.4.10 Definition

Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir eine Addition

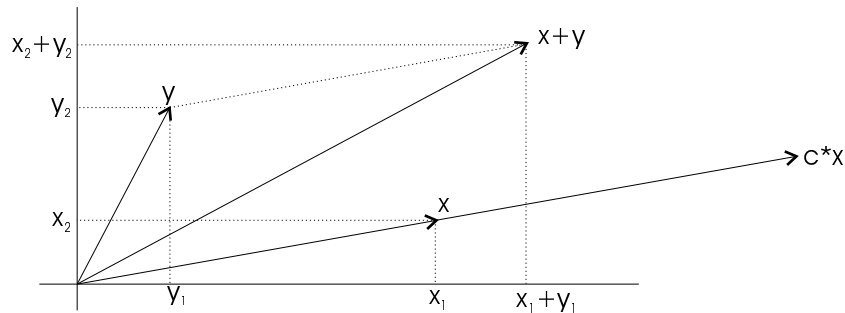
$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, (x, y) \mapsto x + y$$

und eine skalare Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, (c, x) \mapsto c * x$$

durch $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ und $c * x = (c * x_1, c * x_2, \dots, c * x_n)$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Diese Rechenoperationen kann man sich in $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ zeichnerisch veranschaulichen. Wir machen das für den $\mathbb{R}^2$:



$x + y$ erhält man als Diagonale des durch die Punkte x, y und 0 definierten Parallelogramms, $c * x$ liegt auf der Geraden durch 0 und x . Jetzt können wir 1.4.3 und 1.4.8 eleganter ausdrücken.

1.4.11

Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge von 1.4.1 und $\mathbb{L}^\circ$ die Lösungsmenge des homogenen Systems 1.4.2. Sei $z \in \mathbb{L}^\circ$ fest gewählte spezielle Lösung. Dann gilt:

$$\mathbb{L} = \{z + x; \quad x \in \mathbb{L}^\circ\}$$

Weiter gilt: Sind $x, y \in \mathbb{L}^\circ$ und $c \in \mathbb{K}$ beliebig, so ist $x + y \in \mathbb{L}^\circ$ und $c * x \in \mathbb{L}^\circ$.

1.4.12 Rechenregeln

Für die Addition:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n$
2. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$
3. $\exists 0 \in \mathbb{K}^n$, so dass $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, nämlich $0 = (0, 0, \dots, 0)$
4. zu $x \in \mathbb{K}^n$ $\exists -x$, so dass $x + (-x) = 0$, nämlich $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Für die skalare Multiplikation: $\forall a, b \in \mathbb{K}$ und $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt

5. $(ab) * x = a * (bx)$
6. $a(x + y) = ax + by$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $1 * x = x$

Beweis

Man rechnet diese Regeln einfach nach. Wir machen das exemplarisch für die Regeln (3) und (7):

$$3. \quad x + 0 = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

7.

$$\begin{aligned}
(a+b)x &= ((a+b) * x_1, (a+b) * x_2, \dots, (a+b) * x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, \dots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (bx_1, bx_2, \dots, bx_n) \\
&= ax + bx
\end{aligned}$$

Die Rechenregeln für die Addition sind dieselben, wie die eines Körpers. Bei Körpern haben wir bereits gesehen, dass eine axiomatische Behandlung sinnvoll ist, weil man dann allgemein gültige Resultate für alle Körper erhält. Es liegt daher nahe, bei der Behandlung der Addition und skalaren Multiplikation sich von dem speziellen Fall $\mathbb{K}^n$ zu lösen und ebenfalls axiomatisch vorzugehen, um dann für die Resultate ein grösseres Anwendungsspektrum zu haben. Auch das ist eine in der Mathematik typische Vorgehensweise: Für einige gegebene Beispiele entwickelt man ein mathematisches Modell, das man untersucht, wobei die gegebenen Beispiele Leitlinien für die Untersuchung bilden. Man hofft, auf diese Weise Einsichten über gut untersuchte Beispiele auf weniger bekannte Objekte mit gleicher Struktur erweitern zu können.

Unsere zentralen Anwendungen sind nach wie vor Gleichungssysteme und für deren Lösungen gelten die Rechenregeln 1.4.12. Es liegt daher nahe, diese Rechenregeln für die axiomatische Behandlung heranzuziehen. Wir werden im Anschluss daran erläutern, warum wir ausgerechnet die Rechenregeln 1.4.12 und nicht andere Rechenregeln, wie etwa $0 * x = 0$ gewählt haben.

1.4.13 Definition: Vektorraum

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist eine Menge V zusammen mit einer Addition:

$$V \times V \rightarrow V \quad , (x, y) \mapsto x + y$$

und einer skalaren Multiplikation:

$$\mathbb{K} \times V \rightarrow V \quad , (a, x) \mapsto a * x$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind.

1. Name ???

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad , \forall x, y, z \in V$$

2. Name ???

$$x + y = y + x \quad , \forall x, y \in V$$

3. Nullvektor

$$\exists 0 \in V \Rightarrow x + 0 = x \quad , \forall x \in V$$

4. Additive Inverse

$$\forall x \in V \quad \exists -x \in V \Rightarrow x + (-x) = 0$$

5. NAME ???

$$(ab) * x = a * (bx) \quad \forall a, b \in \mathbb{K} \quad , \forall x \in V$$

6. NAME ???

$$a * (x + y) = ax + ay \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$$

7. NAME ???

$$(a + b) * x = ax + bx \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in V$$

8. Neutrales Element der Multiplikation (Einselement)

$$1 * x = x \quad , \forall x \in V$$

Die Elemente von V nennt man Vektoren.

1.4.14 Bemerkung

Die Axiome der Addition sind für unser Beispiel $\mathbb{K}^n$ erfüllt. Sie sind identisch mit den Axiomen der Addition für Körper, die wir bereits als sinnvoll eingesehen haben. Die Axiome der skalaren Multiplikation gelten ebenfalls in $\mathbb{K}^n$. Wichtig ist hier aber ein weiterer mathematischer Sachverhalt: In $\mathbb{K}$ haben wir eine Addition und eine Multiplikation. Die Axiome (5), ..., (8) geben nun an, wie sich diese Strukturen zur Struktur auf V , d.h. zur skalaren Multiplikation und Addition auf V verhalten.

Bevor wir erste Folgerungen aus den Axiomen ziehen, stellen wir zwei weitere Beispiele vor.

1.4.15 Beispiel

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und M eine beliebige Menge. Dann ist die Menge

$$\text{Abb}(M, \mathbb{K})$$

aller Abbildungen von M nach $\mathbb{K}$ mit folgenden Verknüpfungen ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum:

Sei $f, g \in \text{Abb}(M, \mathbb{K})$, $a \in \mathbb{K}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \forall x \in M$$

$$(a * f)(x) = a * f(x) \quad , \forall x \in M$$

Der Nachweis der Axiome ist dem Leser überlassen.

1.4.16 Beispiel

Wir erinnern daran, dass $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dann ist $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (a, x) \mapsto a * x$$

ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Auf die gleiche Art kann man $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation als $\mathbb{Q}$ -Vektorräume auffassen.

Vektorräume dieser Art spielen in der Algebra und der Zahlentheorie eine zentrale Rolle.

1.4.17 Folgerung aus den Axiomen

1. Da die Axiome der Addition mit denen der Addition in Körpern übereinstimmen, erhalten wir aus 1.2.5: Es gibt genau einen Nullvektor 0 und der negative Vektor $-x$ von x ist ebenfalls eindeutig gegeben.
2. $0_{\mathbb{K}} * x = 0_V \quad \forall x \in V, 0 \in \mathbb{K}$
3. $a * 0_{\mathbb{K}} = 0_V \quad \forall a \in \mathbb{K}, 0 = \text{Nullvektor}$
4. $(-a) * x = -(a * x) = a * (-x) \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in V$
5. $(-1) * x = -x \quad \forall x \in V$
6. $a * x = 0 \iff a = 0 \text{ oder } x = 0$
7. Für $x, y \in V$ schreiben wir kurz $x - y$ für $x + (-y)$. Es gilt

$$a * (x - y) = a * x - a * y \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$$

Beweis

2. $0 * x = (0 + 0) * x = 0 * x + 0 * x$ Ziehen wir $0 * x$ ab, erhalten wir $0 * x = 0$
3. wird genauso gezeigt
4. $a * x + (-a) * x = (a - a) * x = 0 * x = 0$. Abziehen von $a * x$ gibt $(-a) * x = -(a * x)$
Genauso zeigt man, dass $a * (-x) = -(a * x)$
5. folgt aus (4): $(-1) * x = -(1 * x) = -x$
6. Angenommen $a \neq 0$. Dann gilt $a^{-1} * (ax) = a^{-1} * 0 = 0$ Aber $a^{-1} * (ax) = (a^{-1} * a) * x = 1 * x = x$. Also $x = 0$.
7. $a * (x - y) = a * x + a * (-y) = a * x + (-(ay)) = ax - ay$

1.4.18 Definition: Untervektorraum

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset V$ heisst Untervektorraum, wenn W mit der Addition in V und der skalaren Multiplikation in V in $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.

Wir haben jetzt Unterkörper und Untervektorräume kennengelernt. Hier wird ein typischer Grundsatz der Mathematik angewandt. Wir haben eine Menge M mit einer (hier algebraischen) Struktur gegeben. Eine Teilmenge $N \subset M$ heisst dann Unterobjekt von M , wenn die Struktur auf M dieselbe Struktur auf N definiert.

Als erstes machen wir uns klar, welche Bedingungen $W \subset V$ erfüllen muss, damit W ein Untervektorraum ist.

1.4.19

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $W \subset V$ Teilmenge. Dann gilt

- $$W \text{ ist Untervektorraum} \iff \begin{aligned} & \text{(i) } W \neq \emptyset \\ & \text{(ii) } x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ & \text{(iii) } x \in W, a \in \mathbb{K} \Rightarrow a * x \in W \end{aligned}$$

Beweis

Die Bedingungen (ii) und (iii) sind dafür notwendig, dass die Addition und skalare Multiplikation auf V auch Verknüpfungen auf W sind. Damit ist “ $\Rightarrow$ ” klar, weil auch $0 \in W$ sein muss.

“ $\Leftarrow$ ” Wie schon erwähnt, definiert die Struktur auf V wegen (ii) und (iii) eine Struktur auf W . Nach (iii) ist mit x auch $(-1) * x = -x$ aus W und damit auch $0 = x - x$. Die übrigen Axiome gelten für W , weil sie bereits auf der grösseren Menge V gelten.

1.4.20 Beispiel

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}^\circ$ des homogenen Gleichungssystems 1.4.2 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Wenn wir also etwas über die Struktur von $\mathbb{L}^\circ$ erfahren wollen, müssen wir Untervektorräume studieren.

1.4.21 Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge.

Sei W_i für $i \in J$ ein Untervektorraum von V . Dann ist

$$W = \bigcap_{i \in J} W_i$$

ein Untervektorraum von V .

Beweis

$0 \in W_i$ für alle $i \in J$. Also $0 \in W$ und damit $W \neq \emptyset$ (die Bedingung $W \neq \emptyset$ teste man stets am einfachsten durch $0 \in W$).

Sind nun $x, y \in W$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $x, y \in W_i, \forall i \in J$. Da W_i ein Untervektorraum von V ist, folgt $x + y \in W_i$ und $a * x \in W_i, \forall i \in J$. Also $x + y \in W$ und $ax \in W$.

Wir brauchen 1.4.21, damit folgende Definition sinnvoll ist.

1.4.22 Definition: Span

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren $\text{Span}(M)$ als den kleinsten Untervektorraum von V , der M enthält. D.h.

1. $M \subset \text{Span}(M)$
2. Ist W ein Untervektorraum von V , so dass $M \subset W$, dann gilt

$$\text{Span}(M) \subset W$$

1.4.23

$\text{Span}(M)$ existiert. Genauer gilt: $\text{Span}(M)$ ist der Durchschnitt aller Untervektorräume W von V mit $M \subset W$.

1.4.24 Beispiel

1. $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$
2. $\text{Span}(V) = V$

1.4.25 Definition: Erzeugendensystem, Endlich Erzeugt

Eine Teilmenge $M \subset V$, für die $\text{Span}(M) = V$ gilt, heisst Erzeugendensystem von V . Besitzt V ein endliches Erzeugendensystem, heisst V endlich erzeugt. Die Beschreibung 1.4.23 von $\text{Span}(M)$ ist ziemlich abstrakt. Wir werden gleich eine konkretere geben. Aber 1.4.22 und 1.4.23 sind Konzepte, die man sofort auf andere Strukturen übertragen kann. Um nur ein Beispiel zu nennen, könnte man genauso den kleinsten Unterkörper von $\mathbb{K}$, der eine vorgegebene Bildmenge $M \subset \mathbb{K}$ enthält definieren und angeben. Wir haben wieder ein weiteres Standardrezept der Mathematik kennengelernt.

1.4.26 Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $M \subset V$ eine nichtleere Teilmenge. Dann gilt

$$\text{Span}(M) = \{x \in V ; \exists y_1, \dots, y_k \in M \text{ und } a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K} \text{ mit } x = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k\}$$

1.4.27 Bezeichnung: Linearkombination

Ein Ausdruck der Form

$$x = \sum_{i=1}^k a_i y_i = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k \quad , y_i \in V, a_i \in \mathbb{K}$$

heisst Linearkombination von $y_1, \dots, y_k$. $\text{Span}(M)$ ist also die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M .

Beweis 1.4.26

Sei W die Menge auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. W ist Untervektorraum von V , denn:

1. $W \neq \emptyset$, weil $M \neq \emptyset$
2. Sind $x = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$ und $x' = b_1 z_1 + \dots + b_l z_l$ aus W , d.h. $y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l \in M$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$x + x' = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k + b_1 z_1 + \dots + b_l z_l$$

ebenfalls eine Linearkombination von Vektoren aus M . Also $x + x' \in W$

3. Ist $a \in \mathbb{K}$, so ist $a * x = (a * a_1) y_1 + \dots + (a * a_k) y_k$ wieder eine Linearkombination von Vektoren aus M , also $a * x \in W$.
Nun gilt $M \subset W$, denn für $y \in M$ ist $y = 1 * y \in W$. Es folgt $\text{Span}(M) \subset W$.
Da aber $M \subset \text{Span}(M)$ und $\text{Span}(M)$ ein Untervektorraum ist, sind alle Linearkombinationen von Vektoren aus M in $\text{Span}(M)$. D.h. $W \subset \text{Span}(M)$. 3

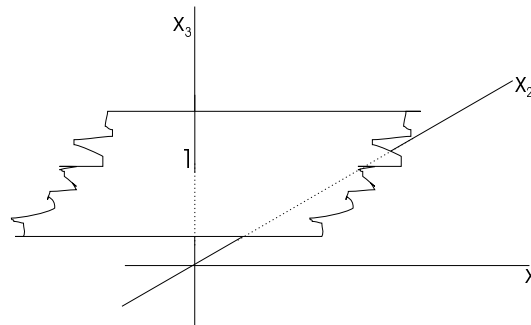
1.4.28 Beispiel

1. Sei $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$ aus $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\text{Span}(e^1, e^2, e^3) = \mathbb{R}^3$$

2. In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die “Ebene”

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_3 = 1\}$$



Dann ist $\text{Span}(M) = \mathbb{R}^3$

Denn sei $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor, dann ist

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - 1) * (0, 0, 1) + 1 * (x_1, x_2, 1) \in \text{Span}(M)$$

Durchschnitte von Untervektorräumen sind wieder Untervektorräume. Für Vereinigungen ist das in den seltensten Fällen richtig. Als “Ersatz” nehmen wir.

1.4.29 Definition: Summe, Direkte Summe

Sind $W_1, \dots, W_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums V , dann heisst der Untervektorraum

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \text{Span}(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n) = \{x_1 + \dots + x_n ; x_i \in W_i \forall i\}$$

die Summe von $W_1, \dots, W_n$.

Gilt ausserdem $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\} \quad \forall i = 1, \dots, n$, heisst $W_1 + \dots + W_n$ direkte Summe und wird auch mit $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ bezeichnet.

Bemerkung

Da die W_i Untervektorräume sind, kann man Linearkombinationen von Vektoren in W_i zu einem Vektor zusammenfassen. Daher gilt

$$\text{Span}(W_1 \cup \dots \cup W_n) = \{x_1 + \dots + x_n ; x_i \in W_i, i = 1, \dots, n\}$$

Diese Gleichung legt auch die Bezeichnung $W_1 + \dots + W_n$ nahe.

Die direkte Summe besitzt folgende wichtige Eigenschaft.

1.4.30 Satz

Es seien $W_1, \dots, W_n$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums V . Dann sind für $W = W_1 + \dots + W_n \subset V$ folgende Aussagen äquivalent:

1. $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$
2. Jedes $x \in W$ besitzt eine Darstellung $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ mit $x_i \in W_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2):

Da $x \in W = W_1 + \dots + W_n$, gibt es $x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$ mit

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad (*)$$

Sei $y = y_1 + \dots + y_n$ eine weitere Darstellung mit $y_i \in W_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann folgt $0 = x - y = (x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n)$

Also gilt

$$-(x_i - y_i) = (x_1 - y_1) + \dots + (x_{i-1} - y_{i-1}) + (x_{i+1} - y_{i+1}) + \dots + (x_n - y_n)$$

Die rechte Seite liegt in $W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n$ und die linke Seite in W_i . Da aber $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\}$, folgt

$$x_i - y_i = 0$$

Damit ist die Darstellung $*$ eindeutig.

(2) $\Rightarrow$ (1):

Sei $x \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n)$. Dann besitzt x eine Darstellung

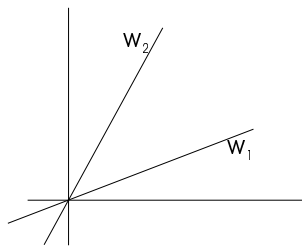
$$x = x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n$$

mit $x_k \in W_k$ für alle k . Dann sind aber

$$x = 0 + \dots + 0 + x + 0 + \dots + 0$$

$$x = x_1 + \dots + x_{i-1} + \overset{i}{0} + x_{i+1} + \dots + x_n$$

zwei Darstellungen von x gemäss (2). Wegen der Eindeutigkeit folgt $x = 0$, also $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\}$.

1.4.31 Beispiel

In $\mathbb{R}^2$ sei $W_1 = \{(2x, x); x \in \mathbb{R}\}$ und $W_2 = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$. W_1 und W_2

sind Untervektorräume und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Es gilt $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$, denn $(x, y) = (2 * \frac{2x-y}{3}, \frac{2x-y}{3}) \in W_1 + (\frac{2y-x}{3}, 2 * \frac{2y-x}{3}) \in W_2$.

Da sich jeder Vektor aus $\mathbb{R}^2$ eindeutig als Summe von Vektoren aus W_1 und W_2 darstellen lässt und W_1, W_2 eindimensional sind, können wir $\{W_1, W_2\}$ als schiefwinkeliges Koordinatensystem auffassen.

Auf geeignete Wahlen von Koordinatensystemen werden wir später noch eingehen.

Zunächst müssen wir dafür aber klären, was wir unter der Dimension eines Vektorraums verstehen, wobei wir uns natürlich von der Anschauung leiten lassen. Weiterhin müssen wir untersuchen, wie wir direkte Summenzerlegungen von V in 1-dimensionale Untervektorräume konstruieren können.

Wir wollen den Begriff der direkten Summe noch etwas erweitern.

1.4.32 Definition und Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann ist $V \times W$ mit den Verknüpfungen

Addition: $(V \times W) \times (V \times W) \rightarrow V \times W$, $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

Skalarmultiplikation: $\mathbb{K} \times (V \times W) \rightarrow V \times W$, $a * (v, w) = (a * v, a * w)$

ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, genannt das Produkt von V und W .

Beweis

Der Nachweis der Vektorraumaxiome ist einfach. Wir beweisen exemplarisch die Axiome 1.4.13.3 und 1.4.13.6:

3. $(0, 0)$ ist der Nullvektor in $V \times W$, denn $(v, w) + (0, 0) = (v + 0, w + 0) = (v, w)$
6. $a * ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) = a * (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (a * (v_1 + v_2), a * (w_1 + w_2)) = (a * v_1 + a * v_2, a * w_1 + a * w_2) = (a * v_1, a * w_1) + (a * v_2, a * w_2) = a * (v_1, w_1) + a * (v_2, w_2)$

man sieht sofort, dass $V \times 0 = \{(v, 0); v \in V\}$ und $0 \times W = \{(0, w); w \in W\}$ Untervektorräume von $V \times W$ sind. Da $(v, w) = (v, 0) + (0, w)$, gilt $V \times W = V \times 0 + 0 \times W$. Da ausserdem $V \times 0 \cap 0 \times W = \{(0, 0)\}$, folgt.

1.4.33

$$V \times W = V \times 0 \oplus 0 \times W$$

Aus diesem Grunde nennt man $V \times W$ oft auch als (äussere) direkte Summe von V und W , bezeichnet mit $V \oplus W$.

1.5 Basis und Dimension

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

1.5.1 Definition: Linear Unabhängig, Linear Abhängig

Vektoren $x_1, \dots, x_n$ aus V heissen linear unabhängig (über $\mathbb{K}$ und $\{x_1, \dots, x_n\}$ heisst linear unabhängiges System, wenn aus

$$0 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad , \text{ mit } a_i \in \mathbb{K} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

folgt, dass $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Gibt es $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, so dass $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ und $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, heissen $x_1, \dots, x_n$ linear abhängig.

1.5.2

$x_1, \dots, x_n$ sind linear abhängig $\iff$ mindestens ein x_i ist Linearkombination der übrigen Vektoren $x_j, j \neq i$.

Beweis

$x_1, \dots, x_n$ linear abhängig $\iff \exists (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ in $\mathbb{K}^n$ mit $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

Sei etwa $a_i \neq 0$. Dann folgt aus: $a_i x_i = -a_1 x_1 - \dots - a_{i-1} x_{i-1} - a_{i+1} x_{i+1} - \dots - a_n x_n$

$$x_i = -\frac{a_1}{a_i} x_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} x_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} x_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i} x_n$$

Sei umgekehrt $x_i = b_1 x_1 + \dots + b_{i-1} x_{i-1} + b_{i+1} x_{i+1} + \dots + b_n x_n$, dann gilt

$$0 = b_1 x_1 + \dots + b_{i-1} x_{i-1} - x_i + b_{i+1} x_{i+1} + \dots + b_n x_n$$

Da der Koeffizient von x_i von 0 verschieden ist, sind $x_1, \dots, x_n$ linear abhängig.

1.5.3 Definition: Basis

Eine Menge $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ von Vektoren aus V heisst Basis von V (genauer $\mathbb{K}$ -Basis von V), wenn $V = \text{Span}(B)$, d.h. B ist ein Erzeugendensystem von V , und B ist linear unabhängiges System.

Eine Basais von V kann man als "schiefwinkliges" Koordinatensystem auffassen, denn es gilt

1.5.4 Satz

Ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V dann besitzt jedes $x \in V$ genau eine Darstellung als Linearkombination:

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad a_i \in \mathbb{K} \quad , i = 1, \dots, n$$

der x_i . Es folgt

$$V = \mathbb{K} * x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K} * x_n$$

Beweis

Da $V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$ hat jedes x eine Darstellungsform $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ mit $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Ist $x = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ eine zweite solche Darstellung so folgt:

$$0 = x - x = (a_1 - b_1)x_1 + \dots + (a_n - b_n)x_n$$

Da $\{x_1, \dots, x_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $a_i - b_i = 0 \forall i$, also $a_i = b_i \forall i$. Da für jeden Vektor x die Menge $\mathbb{K} * x = \{ax; a \in \mathbb{K}\}$ ein Untervektorraum von V ist, folgt der zweite Teil aus 1.4.30.

1.5.5 Definition: Dimension

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Dimension von V , $\dim V$, ist die grösste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass V n linear unabhängige Vektoren besitzt. Gibt es kein solches grösstes n , setzen wir $\dim V = \infty$.

1.5.6 Satz

Ist V endlichdimensional, $\dim V = n$, und sind $x_1, \dots, x_n \in V$ linear unabhängig, dann ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V . Insbesondere ist jeder endlichdimensionale Vektorraum auch endlich erzeugt.

Beweis

Wir brauchen nur zu zeigen, dass $V \subset \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Sei $x \in V$. Da $\dim V = n$ ist $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ linear abhängig (da sonst $\dim V \geq n + 1$). Also hat man eine Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x = 0, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

in der nicht alle $a_i = 0$ sind. Es muss $a_{n+1} \neq 0$ gelten, da sonst $x_1, \dots, x_n$ linear abhängig wären. Es folgt

$$x = -\frac{1}{a_{n+1}}(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) \in \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$$

.

1.5.7 Satz: Basisergänzungssatz

Seien $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängige Vektoren in V und $y_1, \dots, y_s$ weitere Vektoren, so dass

$$V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$$

Dann gibt es eine Teilmenge $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_k} \subset \{y_1, \dots, y_s\}$, so dass $\{x_1, \dots, x_r, y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ Basis von V ist.

Beweis

Unter allen Teilmengen $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ von $\{y_1, \dots, y_s\}$, für die gilt

$$V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_r, y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$$

wählen wir eine mit minimalem k . Wir numerieren die y_i so um, dass $\{y_1, \dots, y_k\}$ diese gewählte Teilmenge ist. Es gilt also:

$$V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k\}$$

aber lässt man ein y_i weg, wird V vom Rest nicht mehr erzeugt.

Behauptung

$\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k\}$ ist Basis von V .

Beweis

Wir müssen nur die lineare Unabhängigkeit nachweisen. Sei also eine Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_rx_r + b_1y_1 + \dots + b_ky_k = 0 \quad a_i, b_j \in \mathbb{K}$$

gegeben. Angenommen $b_i \neq 0$, dann folgt wie im Beweis von 1.5.6

$$y_i \in \text{Span}\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k\}$$

und damit

$$V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k\}$$

Wegen der Minimalität von k ist das unmöglich. Also sind alle $b_i = 0$. Da $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig sind, folgt dann aber, dass alle $a_i = 0$.

1.5.8 Satz: Basisauswahlsatz

Aus jedem endlich Erzeugendensystem $\{y_1, \dots, y_n\}$ eines Vektorraums $V \neq \{0\}$ kann man eine Basis auswählen.

Beweis

Wende den Basisergänzungssatz mit $r = 0$ an.

1.5.9 Satz: Basisaustauschsatz

Sind $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängige Vektoren in V und ist M ein Erzeugendensystem von V , dann kann man r Vektoren aus M so auswählen, und gegen die $x_1, \dots, x_r$ austauschen, dass man wieder ein Erzeugendensystem von V erhält.

Beweis

Da M ein Erzeugendensystem ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in M$, so dass

$$x_1 = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \quad a_i \in \mathbb{K}$$

Da $x_1 \neq 0$, ist mindestens ein $a_i \neq 0$. Durch Umsummieren dürfen wir annehmen, dass $a_1 \neq 0$. Es folgt wie oben

$$y_1 \in \text{Span}\{x_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Also ist $M_1 = \{x_1\} \cup M \setminus \{y_1\}$ ein Erzeugendensystem von V .

Wir nehmen nun an, wir hätten $x_1, \dots, x_{k-1}$ gegen Vektoren $y_1, \dots, y_{k-1} \in M$ so ausgetauscht, dass $M_{k-1} = \{x_1, \dots, x_{k-1}\} \cup M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ auch V erzeugt. Dann gilt

$$x_k = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} + a_k y_k + \dots + a_s y_s \quad a_i \in \mathbb{K}$$

mit $y_i \in M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$. Da $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ linear unabhängig ist, können nicht alle $a_k, a_{k+1}, \dots, a_s$ Null sein. Durch Umsummieren dürfen wir annehmen, dass $a_k \neq 0$. Es folgt

$$y_k \in \text{Span}\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_{k+1}, \dots, y_s\}$$

Also ist $M_k = \{x_1, \dots, x_k\} \cup M \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ ein Erzeugendensystem von V .

Wir fahren fort, bis alle x_i gegen y_i getauscht sind.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen.

1.5.10 Satz

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

1. Ist $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine Basis von V und $\{y_1, \dots, y_s\}$ ein Erzeugendensystem, dann gilt $r \leq s$.
2. Ist $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine Basis von V , so gilt $\dim V = r$. Also haben alle Basen von V dieselbe Anzahl von Elementen.
3. $\dim V = \min\{n \in \mathbb{N}; \exists x_1, \dots, x_n \in V \text{ mit } V = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}\}$

Beweis

1. folgt aus dem Austauschsatz.
2. Da eine Basis auch ein Erzeugendensystem ist, haben nach (1) Basen gleichviele Elemente. Nach 1.5.6 gibt es aber eine Basis mit $\dim V$ Elementen. Also folgt (2).
3. Aus (1) und (2) folgt wiederum (3).

1.5.11 Beispiel: Die Standardbasis

$\dim \mathbb{K}^n = n$: Sei $e^i = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Dann ist $\{e^1, \dots, e^n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, genannt die Standardbasis. Der Beweis dafür ist trivial.

Anwendungen auf $\mathbb{K}^n$ und lineare Gleichungssysteme

Seien $v^1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $v^2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $v^m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ Vektoren im $\mathbb{K}$ -Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

1.5.12 Test auf lineare Unabhängigkeit

Wie testet man die lineare Unabhängigkeit von $v^1, \dots, v^m$?

$v^1, \dots, v^m$ sind linear unabhängig $\iff$ die vektorielle Gleichung

$$x_1 v^1 + \dots + x_m v^m = 0 \quad , x_i \in \mathbb{K}$$

hat nur die triviale Lösung $(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$.

Schreiben wir diese Gleichung koordinatenweise aus, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{21}x_2 & +\dots & +a_{m1}x_m & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{1n}x_1 & +a_{2n}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_m & = & 0 \end{array}$$

von n Gleichungen mit m Unbekannten. Man beachte, dass die Indizes der a_{ij} anders geordnet sind als in 1.4.2.

Da $\mathbb{K}^n$ nur Systeme mit höchstens n linear unabhängigen Vektoren besitzt 1.5.11, brauchen wir nur den Fall $m \leq n$ zu erörtern. Wir sehen sofort: $v^1, \dots, v^m$ sind genau dann linear unabhängig wenn die Dreiecksform 1.1.8 des Gleichungssystems die Gestalt

$$\begin{array}{cccccc} x_{q_1} & x_{q_2} & \dots & x_{q_m} & b \\ 1 & a'_{21} & \dots & a'_{m1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

hat.

1.5.13 Geometrische Interpretation der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems

Wir betrachten das reduzierte System 1.1.13 eines lösbaren linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_{q_1} & x_{q_2} & \dots & x_{q_r} & x_{q_{r+1}} & \dots & x_{q_n} & b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r,r+1}^* & \dots & a_{r,n}^* & b_r^* \end{array}$$

Wir lesen sofort die spezielle Lösung ab:

$$x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) \quad \text{mit} \quad x_{q_i}^\circ = \begin{cases} b_i^* & \text{für } 1 \leq i \leq r, \\ 0 & \text{für } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Ist $\mathbb{L}$ die Gesamtlösungsmenge und $\mathbb{L}^\circ$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, so wissen wir

$$\mathbb{L} = x^\circ + \mathbb{L}^\circ := \{x^\circ + x \mid x \in \mathbb{L}^\circ\}$$

und $\mathbb{L}^\circ$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$. Das reduzierte Schema für das homogene Gleichungssystem sieht genauso aus, nur dass $b_i^* = 0 \quad \forall i$ ist. Damit können wir aus dem Schema sofort eine Basis für $\mathbb{L}^\circ$ ablesen.

1.5.14

Das reduzierte Schema liefert uns eine Basis von $n - r$ Vektoren $v^1, \dots, v^{n-r}$ von $\mathbb{L}^\circ$. Für die Koordinaten $v_1^i, \dots, v_n^i$ von v^i gilt: $v_{q_j}^i = \begin{cases} -a_{j,r+i}^* & 1 \leq j \leq r \\ 1 & j = r + i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Um die Bezeichnungsweise nicht zu überfrachten, erläutern wir das für den Fall, dass die x_i in der üblichen Reihenfolge aufgelistet sind:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & b \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,r+1}^* & & a_{2n}^* & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn}^* & b_r^* \end{array} \quad (1.1)$$

In der b -Spalte haben wir Nullen, weil wir das homogene System betrachten. Die Idee ist nun, die Gleichungsteile mit $x_{r+1}, \dots, x_n$ auf die Rechte Seite zu bringen, daher gehen die $a_{i,j}^*$ nach $-a_{i,j}^*$ über. Dann setzen wir ein $x_j = 1$ für $j \geq r + 1$ und die übrigen 0 und lesen dann die Werte für $x_1, \dots, x_r$ ab. Wir erhalten die Vektoren

$$\begin{aligned} v^1 &= (-a_{1,r+1}^*, -a_{2,r+1}^*, \dots, -a_{r,r+1}^*, 1, 0, \dots, 0) \\ v^2 &= (-a_{1,r+2}^*, -a_{2,r+2}^*, \dots, -a_{r,r+2}^*, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v^{n-r} &= (-a_{1,n}^*, -a_{2,n}^*, \dots, -a_{r,n}^*, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig. Aus $c_1 v^1 + \dots + c_{n-r} v^{n-r} = 0 \quad c_i \in \mathbb{K}$ folgt $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-r} = 0$, denn die letzten $n - r$ Koordinaten des Summenvektors auf der linken Seite sind $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$.

Nach 1.1.14 ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ genau dann Lösung unseres homogenen Systems, wenn

$$\begin{aligned} x_1 &= -a_{1,r+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{1n}^* x_n \\ x_2 &= -a_{2,r+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{2n}^* x_n \\ &\vdots \\ x_r &= -a_{r,r+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{rn}^* x_n \end{aligned}$$

Für dieses x gilt aber

$$x = x_{r+i}v^1 + \dots + x_nv^{n-r}$$

Also ist $\{v^1, \dots, v^{n-r}\}$ auch ein Erzeugendensystem von $\mathbb{L}^\circ$. Wir erhalten:

1.5.15

$\mathbb{L}^\circ$ ist ein $(n-r)$ -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ mit der Basis $v^1, \dots, v^{n-r}$.

1.5.16 Definition: Affiner Unterraum

Sei $W \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum und $x^\circ \in \mathbb{K}^n$ fest gewählt. Dann heisst:

$$x^\circ + W = \{x^\circ + y \mid y \in W\}$$

affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

1.5.17

Die Lösungsmenge eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

1.5.18 Finden einer Basis eines Untervektorraums

Wir wollen annehmen, dass wir einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{K}^n$ durch ein Erzeugendensystem gegeben haben und suchen eine Basis von W . Sei also $\{y_1, \dots, y_m\}$ ein Erzeugendensystem von W , d.h. $W = \text{Span}\{y_1, \dots, y_m\}$

1.5.19 Lemma

1. $\text{Span}\{y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_m\} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_m\}$
2. Für $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist $\text{Span}\{y_1, \dots, y_i, \dots, y_m\} = \text{Span}\{y_1, \dots, c \cdot y_i, \dots, y_m\}$
3. Für $i \neq j$ und $c \in \mathbb{K}$ ist $\text{Span}\{y_1, \dots, y_m\} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_i + cy_j, \dots, y_j, \dots, y_m\}$

Beweis

1. trivial
2. trivial
3. beachte $y_i + c \cdot y_j \in \text{Span}\{y_1, \dots, y_m\}$ und wegen $y_i = y_i + cy_j - cy_j$ $y_j \in \text{Span}\{y_1, \dots, y_i + cy_j, \dots, y_j, \dots, y_m\}$

Sei nun $y_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Wir schreiben die y_i als Zeilen eines Schemas

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Nach 1.5.19 spannen die Zeilenvektoren bei Umformungen nach dem Gaußschen Verfahren wieder W auf. Aber Achtung: Spaltenvertauschung bedeutet Koordinatenvertauschung, d.h. die x_i -Spalte gibt die i -ten Koordinaten an. Wir erläutern das Ergebnis am Endschema 1.1 (Im allgemeinen Fall muss man noch die Koordinaten zurücktauschen). Danach hat W die Vektoren

$$\begin{aligned} w^1 &= (1, 0, \dots, 0, a_{1,r+1}^*, \dots, a_{1,n}^* \\ &\vdots \\ w^r &= (0, 0, \dots, 1, a_{r,r+1}^*, \dots, a_{r,n}^* \end{aligned}$$

als Basis: Nach 1.5.19 spannen sie W auf. Sie sind linear unabhängig, wie man an den ersten r Koordinaten sofort sieht. Wir schliessen den Abschnitt mit zwei Dimensionsformeln.

1.5.20 Satz

Seien W_1 und W_2 endlichdimensionale Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraumes V . Dann gilt:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

Beweis

Behauptung

1.5.21 Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum, der die direkte Summe von k endlichdimensionalen Untervektorräumen W_i ist, also $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. Dann gilt

$$\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_k$$

Für den Beweis benutzen wir mal wieder eine Ergänzung aus den mathematischen Grundlagen.

1.5.22 Ergänzung: Das Induktionsprinzip

Sei $A(n)$ eine Behauptung über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ für $n \geq n_0$. Gilt

1. $A(n_0)$ ist eine wahre Aussage
2. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n \geq n_0$

Dann ist $A(n)$ eine wahre Behauptung für alle $n \geq n_0$.

Denn $A(n_0)$ ist wahr, nach (2) also auch $A(n_0 + 1)$, also auch $A(n_0 + 2)$ usw.. Das Induktionsprinzip folgt sofort aus dem sogenannten Peano-Axiomen für die natürlichen Zahlen.

Beweis 1.5.21

Sei $A(k)$ die Aussage des Satzes.

$A(1)$ ist wahr. Klar!

$A(k) \Rightarrow A(k+1)$: Wir dürfen voraussetzen, dass $A(k)$ wahr ist. Sei nun $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus W_{k+1}$ und $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Dann gilt nach Definition 1.4.29: $W = W + W_{k+1}$ und $W \cap W_{k+1} = \{0\}$. Aus 1.5.20 folgt $\dim W = \dim W + \dim W_{k+1} - \dim(W \cap W_{k+1}) = \dim W + \dim W_{k+1}$

Da $A(k)$ gilt haben wir $\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$

1.6 Lineare Abbildungen

1.6.1 Mathematisches Grundprinzip

Will man Mengen mit einer mathematischen Struktur miteinander vergleichen, betrachtet man Abbildungen zwischen ihnen, die diese Strukturen erhalten!

1.6.2 Definition: Lineare Abbildung

Es seien V und W $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heisst linear (genauer K -linear), wenn gilt:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad , \forall x, y \in V$
2. $f(a * x) = a * f(x) \quad , \forall x \in V, \forall a \in K$

D.h. eine lineare Abbildung erhält die Addition und die skalare Multiplikation auf einem Vektorraum.

1.6.3 Einfache Eigenschaften

Für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gilt:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-x) = -f(x) \quad , \forall x \in V$
3. $f(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i * f(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in V, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
4. $x_1, \dots, x_n$ linear abhängig in $V \Rightarrow f(x_1), \dots, f(x_n)$ linear abhängig
5. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist linear $\iff f(ax + y) = a * f(x) + f(y) \quad , \forall a \in K, \forall x, y \in V$

Beweis

1. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ Addiere $-f(0)$.
2. $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$
3. Beweis durch Induktion: $A(n)$ sei die Aussage von 3
 $A(1)$ ist nach 1.6.2.2 wahr
 $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ Setze $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ Unter Benutzung von $A(n)$ gilt:
 $f(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i) = f(y + a_{n+1} x_{n+1}) = f(y) + f(a_{n+1} x_{n+1}) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i)$
4. $x_1, \dots, x_n$ linear abhängig $\Rightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ in K^n mit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ Mit diesem a_i gilt:
 $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = f(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = f(0) = 0$
 Also sind $f(x_1), \dots, f(x_n)$ linear abhängig.

1.6.4 Lemma

Es seien $f: V_1 \rightarrow V_2$ und $g: V_2 \rightarrow V_3$ lineare Abbildungen von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann gilt:

1. id_{V_1} ist linear
2. $g \circ f$ ist linear

Beweis

1. ist trivial
2. $g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$
 $g \circ f(ax) = g(f(ax)) = g(a * f(x)) = a * g(f(x)) = a * (g \circ f)(x)$

1.6.5 Definition: Isomorphismus

Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen heisst Isomorphismus, wenn es eine lineare Abbildung $g: W \rightarrow V$ gibt, so dass $g \circ f = id_V$ und $f \circ g = id_W$. Wir schreiben $V \cong W$, V und W heissen isomorph. g heisst invers zu f (nach 1.3.22 ist $g = f^{-1}$).

1.6.6 Mathematisches Grundprinzip

Ist $V \cong W$, so sind V und W aus mathematischer Sicht im wesentlichen gleich: Aus der Struktur von V erhält man über f und g die Struktur von W . Z.B. gilt für $w_1, w_2 \in W$:

$$w_1 + w_2 = f \circ g(w_1 + w_2) = f(g(w_1) + g(w_2))$$

Links haben wir die Addition in W . Sie ist durch die Addition $g(w_1) + g(w_2)$ in V eindeutig bestimmt.

Aus dem selben Grund haben V und W als Vektorräume dieselben Eigenschaften. Kennt man V , so kennt man auch W als $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

Definition 1.6.5 lässt sich natürlich auch auf andere Strukturen übertragen, etwa auf Körper.

In vielen Lehrbüchern werden Isomorphismen anders eingeführt. Dabei verliert man aber den allgemeinen mathematischen Grundsatz. Der folgende Satz enthält die häufiger benutzte Beschreibung eines linearen Isomorphismus.

1.6.7 Satz: Linearer Isomorphismus

Es seien U, V, W $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann gilt:

1. $f: U \rightarrow V$ ist ein Isomorphismus $\iff f$ ist linear und bijektiv
2. id_V ist ein Isomorphismus
3. Sind $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ Isomorphismen, dann ist $g \circ f$ ein Isomorphismus

Beweis

1. “ $\Rightarrow$ ” folgt aus 1.3.20

“ $\Leftarrow$ ” Sei $g: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von f . Wir müssen nur zeigen, dass g linear ist. Seien $v_1, v_2 \in V$ und $u_1 = g(v_1), u_2 = g(v_2)$. Dann gilt $f(u_1) = v_1$ und $f(u_2) = v_2$. Es folgt:

$$g(v_1 + v_2) = g(f(u_1) + f(u_2)) = g \circ f(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = g(v_1) + g(v_2)$$

$$g(a * v_1) = g(a * f(u_1)) = g \circ f(a * u_1) = a * u_1 = a * g(v_1)$$

2. und

3. folgen sofort aus (1) und 1.6.4

1.6.8 Satz und Definition: Kern, Bild

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann sind:

Kern $f = \{x \in V; f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$

Bild $f = f(V) = \{y \in W; \exists x \in V \text{ mit } f(x) = y\}$

Untervektorräume von V bzw. W , genannt der Kern und das Bild von f .

Wir müssen zeigen, dass Kern f und Bild f Untervektorräume sind. Da $\{0\} \subset W$ und $V \subset W$ Untervektorräume sind (genannt die trivialen Untervektorräume), folgt das aus folgendem allgemeineren Resultat.

1.6.9 Satz

Sei $f: V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

1. Ist $U \subset V$ Untervektorraum, dann ist $f(U) \subset V'$ Untervektorraum
2. Ist $U' \subset V'$ Untervektorraum, dann ist $f^{-1}(U') \subset V$ Untervektorraum

Beweis

1. Da $U \neq \emptyset$, ist $f(U) \neq \emptyset$. Seien nun $y, y' \in f(U)$ und sei $a \in K$. Dann existieren $x, x' \in U$ mit $f(x) = y, f(x') = y'$. Es folgt:

$$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in f(U) \quad , \text{ da } x + x' \in U$$

$$a * y = a * f(x) = f(a * x) \in f(U) \quad , \text{ da } a * x \in U$$

- 2.

Ein oft benutztes Kriterium für die Injektivität einer linearen Abbildung ist.

1.6.10 Satz: Kriterium für Injektivität eine linearen Abbildung

Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn Kern $f = \{0\}$ (wir schreiben in Zukunft kürzer Kern $f = 0$)

Beweis

Sei f injektiv. Für $x \in \text{Kern } f$ gilt $f(x) = 0 = f(0)$. Da f injektiv ist, folgt $x = 0$.

Sei $\text{Kern } f = 0$ und $f(x) = f(y)$. Dann gilt

$$0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$$

Also $x - y \in \text{Kern } f$, d.h. $x - y = 0$. Also $x = y$.

1.6.11 Satz

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und V endlich dimensional. Dann gilt:
 $\dim V = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f$

Beweis

Als Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums ist $\text{Kern } f$ endlichdimensional (Warum?). Sei $\{x_1, \dots, x_k\}$ Basis von $\text{Kern } f$ und $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r\}$ die Ergänzung zu einer Basis von V (benutze 1.5.7).

Behauptung

$\{f(y_1), \dots, f(y_r)\}$ ist Basis von $\text{Bild } f$ (damit folgt der Satz)

Beweis

Sei $x \in V$ beliebig, $x = a_1 * x_1 + \dots + a_k * x_k + b_1 * y_1 + \dots + b_r * y_r$. Dann gilt:

$$f(x) = b_1 * f(y_1) + \dots + b_r * f(y_r)$$

da $f(x_i) = 0$ für $i = 1, \dots, k$. Also ist $\{f(y_1), \dots, f(y_r)\}$ ein Erzeugendensystem von $\text{Bild } f$. Das System ist linear unabhängig, denn aus

$$a_1 * f(y_1) + \dots + a_r * f(y_r) = 0$$

folgt

$f(a_1 y_1 + \dots + a_r y_r) = 0$, also $a_1 y_1 + \dots + a_r y_r \in \text{Kern } f$. Das ist aber nur möglich, wenn $a_1 = \dots = a_r = 0$.

1.6.12 Definition: Rang und Corang

Die Zahl $\text{rg } f = \dim(\text{Bild } f)$ heisst Rang von f

$\text{crg } f = \dim(\text{Kern } f)$ heisst Corang von f

Lineare Abbildungen haben die schöne Eigenschaft, dass sie durch ihre Werte auf einigen wenigen Vektoren schon festgelegt sind.

1.6.13 Satz

Seien V, W $\mathbb{K}$ -Vektorräume, $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V und $y_1, \dots, y_n$ beliebige Vektoren aus W . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis

Unsere Vorgangsweise ist typisch für viele Existenz und Eindeutigkeitsbeweise. Man nimmt zunächst an, dass f existiert und untersucht, wie f aussehen muss. Dieses Ergebnis verwendet man dann für den Nachweis der Existenz.

Sei also $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so dass $f(x_i) = y_i$. Da B eine Basis ist, hat jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Weil f linear ist muss gelten:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i * f(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i y_i \quad (*)$$

Damit kann es höchstens eine solche lineare Abbildung geben. Das Bild $f(x)$ von x ist durch $*$ für jedes $x \in V$ vorgegeben.

Für diese Existenz von f brauchen wir jetzt nur zu zeigen, dass durch die Vorschrift (1) eine lineare Abbildung definiert wird. Sei $y = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$ ein weiterer Vektor aus V . Dann ist $a * x = (a * a_1)x_1 + \cdots + (a * a_n)x_n$, und $x + y = (a_1 + b_1)x_1 + \cdots + (a_n + b_n)x_n$.

Nach Vorschrift $*$ gilt:

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)y_i, \quad f(y) = \sum_{i=1}^n b_i y_i, \quad f(a * x) = \sum_{i=1}^n a * a_i * y_i$$

Es folgt: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(ax) = a * f(x)$.

1.6.14 Folgerung

Sind $f, g: V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen, die auf einem Erzeugendensystem M von V übereinstimmen, dann gilt $f = g$

Beweis

Wie der Eindeigkeitsatz von 1.6.13

Dieser einfache Satz hat wieder eine Reihe von Konsequenzen:

1.6.15 Satz

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim V = n$. Dann gilt:

$$V \cong \mathbb{K}^n$$

(dabei wird $\mathbb{K}^0$ als $\{0\}$ definiert)

Beweis

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $f(x_i) = e^i$ für $i = 1, \dots, n$ und genau eine lineare Abbildung $g: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ mit $g(e^i) = x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Für die linearen Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$ gilt:

$$f \circ g(e^i) = e^i, \quad g \circ f(x_i) = x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die linearen Abbildungen $\text{id}_{\mathbb{K}^n}$ und id_V erfüllen dieselben Bedingungen. Aus dem Eindeigkeitsatz von 1.6.13 folgt $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$ und $g \circ f = \text{id}_V$. Isomorphe Vektorräume haben die gleichen Eigenschaften. Also muss insbesondere gelten.

1.6.16

Ist $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus von Vektorräumen und sind $x_1, \dots, x_n$ aus V linear unabhängig, so sind auch $f(x_1), \dots, f(x_n)$ aus W linear unabhängig.

Beweis

Wir kontrollieren das nach. Sei $g: W \rightarrow V$ der inverse Isomorphismus und $a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n) = 0$. Dann folgt:

$$0 = g(0) = g(a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)) = a_1 (g \circ f)(x_1) + \dots + a_n (g \circ f)(x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Da $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig sind, folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

Als Folgerung erhalten wir:

1.6.17 Satz

1. Sind V, W beliebige $\mathbb{K}$ -Vektorräume und $V \cong W$, dann folgt $\dim V = \dim W$.
2. Sind V und W endlich dimensional, so gilt: $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

Beweis

Ist $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus mit Inversem $g: W \rightarrow V$. Da f und g linear unabhängige Systeme auf linear unabhängigen Systeme abbilden, gilt $\dim V \leq \dim W$ wegen f und $\dim W \leq \dim V$ wegen g .

Sind nun V und W endlich dimensional und $\dim V = \dim W = n$, folgt $V \cong \mathbb{K}^n$, $W \cong \mathbb{K}^n$, also auch $V \cong W$.

Aus 1.6.17 und 1.6.11 folgt sofort:

1.6.18 Satz

Ist $f: V \rightarrow W$ linear und V endlich dimensional, dann gilt $V \cong \text{Kern } f \oplus \text{Bild } f = (\text{Kern } f \times \text{Bild } f)$

Der Isomorphismus ist von einer Basiswahl abhängig. Sei also $\{x_1, \dots, x_k\}$ Basis von $\text{Kern } f$ und $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r\}$ eine Ergänzung zu einer Basis von V . Aus dem Beweis von 1.6.11 wissen wir, dass $\{f(y_1), \dots, f(y_r)\}$ Basis von $\text{Bild } f$ ist. Dann ist $\{(x_1, 0), \dots, (x_k, 0), (0, f(y_1)), \dots, (0, f(y_r))\}$ Basis von $\text{Kern } f \times \text{Bild } f$ und $x_i \rightarrow (x_i, 0)$, $i = 1, \dots, k$, $y_i \rightarrow (0, f(y_i))$ bildet die Basis von V bijektiv auf diese Basis von $\text{Kern } f \times \text{Bild } f$ ab. Nach 1.6.13 wird dadurch ein linearer Isomorphismus $V \rightarrow \text{Kern } f \times \text{Bild } f$ definiert.

1.6.19 Bezeichnung

Sind V und W $\mathbb{K}$ -Vektorräume, dann bezeichnen wir die Menge der $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ mit

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

1.6.20 Satz

$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(f + g)(v) &= f(v) + g(v) & , f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(v, W) \\ (a * f)(v) &= a * f(v) & , a \in \mathbb{K}, f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\end{aligned}$$

ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum (vergleiche Beispiel 1.4.15)

Beweis

Seien $f, g: V \rightarrow W$ $\mathbb{K}$ -linear. Zunächst müssen wir zeigen, dass die Abbildungen $f + g$ und $a * f$, $a \in \mathbb{K}$, wieder $\mathbb{K}$ -linear sind, damit wir tatsächlich Verknüpfungen auf $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ erhalten.

$$\begin{aligned}(f + g)(v + w) &= f(v + w) + g(v + w) = f(v) + f(w) + g(v) + g(w) \\ &= f(v) + g(v) + f(w) + g(w) = (f + g)(v) + (f + g)(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f + g)(r * v) &= f(r * v) + g(r * v) = r * f(v) + r * g(v) \\ &= r * (f(v) + g(v)) = r * (f + g)(v) \quad r \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a * f)(v + w) &= a * f(v + w) = a * (f(v) + f(w)) \\ &= a * f(v) + a * f(w) = (a * f)(v) + (a * f)(w)\end{aligned}$$

$$(a * f)(r * v) = a * f(r * v) = a * r * f(v) = r * (a * f(v)) = r * ((a * f)(v))$$

Wir beweisen noch exemplarisch die Axiome 1.4.13.3 und 1.4.13.6)

$$a * (f + g) = a * f + a * g$$

Der Beweis der übrigen Axiome 1.4.13 sei dem Leser überlassen

$$\begin{aligned}[a * (f + g)](v) &= a * (f + g)(v) = a * (f(v) + g(v)) \\ &= a * f(v) + a * g(v) = (a * f)(v) + (a * g)(v) = (a * f + a * g)(v)\end{aligned}$$

Der “Nullvektor” dieses Vektorraums ist die Nullabbildung

$$\bar{0} = \bar{0}^{V, W}: V \rightarrow W, v \mapsto 0 \quad \forall v \in V$$

Dann gilt

$$(f + \bar{0})(v) = f(v) + \bar{0}(v) = f(v) + 0 = f(v),$$

so dass $f + \bar{0} = f$.

Wenden wir uns wieder der Komposition zu. Man prüft leicht nach

1.6.21

Für $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen $f: U \rightarrow V$, $g, g_1, g_2: V \rightarrow W$, $h: W \rightarrow X$ gilt:

1. $\bar{0}^{W, V} \circ f = \bar{0}^{W, U} = g \circ \bar{0}^{V, U}$
2. $\text{id}_V \circ f = f = f \circ \text{id}_U$
3. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$
4. $h \circ (g_1 + g_2) = h \circ g_1 + h \circ g_2$
5. $(a * g) \circ f = g \circ (a * f) = a * (g \circ f) \quad \forall a \in \mathbb{K}$

1.6.22 Warnung

Die Komposition $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ ist nicht linear. Hier geben wir der linken Seite die Produktstruktur.

Wäre die Komposition linear, müsste für $f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ und $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ gelten:

$$c((g_1, g_2) + (g_2, f_2)) = c(g_1, f_1) + c(g_2, f_2) = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$$

Aber

$$\begin{aligned} c((g_1, f_1) + (g_2, f_2)) &= c(g_1 + g_2, f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) \circ (f_1 + f_2) \\ &= g_1 \circ (f_1 + f_2) + g_2 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2 + g_2 \circ f_1 + g_2 \circ f_2 \end{aligned}$$

Die Komposition definiert auf $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ eine Verknüpfung, für die nach 1.6.21 die Distributivgesetze gelten. Wir erhalten fast so etwas wie einen Körper.

1.6.23 Definition: Linearer Endomorphismus

Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ heisst linearer Endomorphismus. Wir schreiben:

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \text{ für } \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$$

1.6.24 Satz

$\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist mit der Komposition als “Multiplikation” und der Addition aus 1.6.20 ein Ring (genauer eine $\mathbb{K}$ -Algebra)

1.6.25 Definition: Ring

Ein Ring ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen:

$$\text{Addition: } R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b$$

$$\text{Multiplikation: } R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a * b$$

Es gelten die Axiome (vergleiche 1.2.1)

1. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in R$
2. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in R$
3. $\exists$ Nullelement $0 \in R$, so dass $a + 0 = a \quad \forall a \in R$
4. zu $a \in R$ existiert ein $-a \in R$, so dass $a + (-a) = 0$
5. $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in R$
6. $\exists$ Einselement $1 \in R$, so dass $1 * a = a = a * 1 \quad \forall a \in R$
7. Es gelten die Distributivgesetze

$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad \forall a, b, c \in R$$

$$(b + c) * a = b * a + c * a \quad \forall a, b, c \in R$$

Gilt ausserdem $a * b = b * a \quad \forall a, b \in R$, nennt man R einen kommutativen Ring.

1.6.26 Definition: Rechts- oder Linksinvers

Sei $g: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Eine Abbildung $f: W \rightarrow V$ heisst rechtsinvers zu g und $h: W \rightarrow V$ linksinvers zu g , falls $g \circ f = \text{id}_W$ bzw. $h \circ g = \text{id}_V$.

1.6.27 Lemma

Sei $g: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. Zwei linksinverse $h_1, h_2: W \rightarrow V$ und zwei rechtsinverse $f_1, f_2: W \rightarrow V$ von g können verschieden sein.
2. Besitzt g sowohl links- als auch rechtsinverse, so sind diese gleich. g ist linearer Isomorphismus und die links- und rechtsinversen sind die Umkehrabbildung.

Beweis

2. Sei f ein beliebiges rechtsinverses und h ein beliebiges linksinverses, also $g \circ f = \text{id}_W$, $h \circ g = \text{id}_V$. Dann gilt:

$$f = \text{id}_V \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ \text{id}_W = h$$

Damit ist g linearer Isomorphismus mit Inversem f .

Beispiel für (6.27.1)

Die Abbildungen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, x)$ sind $\mathbb{R}$ -linear. Die Abbildungen $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ und $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ sind ebenfalls $\mathbb{R}$ -linear. Es gilt $p_1 \circ h = p_2 \circ h = \text{id}_\mathbb{R}$ und $p_1 \circ g = p_1 \circ h = \text{id}_\mathbb{R}$.

Zum Abschluss zeigen wir folgendes einfaches und doch zunächst überraschendes Resultat.

1.6.28 Satz

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume gleicher Dimension und $f: V \rightarrow W$ sei lineare Abbildung. Dann gilt:

1. f injektiv $\iff f$ bijektiv
2. f surjektiv $\iff f$ bijektiv

Beweis

Die Rückrichtung ist klar. Sei f injektiv. Dann ist f ein Isomorphismus als Abbildung $f: V \rightarrow \text{Bild } f$.

Es folgt: $\dim(\text{Bild } f) = \dim V = \dim W$. Aus dem Basisergänzungssatz folgt, $\text{Bild } f = W$, also ist f auch surjektiv.

Sei f surjektiv, also $\text{Bild } f = W$. Nach 1.6.11 ist $\dim \text{Kern } f = 0$. Also ist $\text{Kern } f = \{0\}$ und somit f auch injektiv.

1.7 Matrizen

Satz 1.6.13 eröffnet uns eine Möglichkeit, lineare Abbildungen rechnerisch zu erfassen.

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen, $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Wir wählen feste Basen $B = v^1, \dots, v^n$ von V und $B' = w^1, \dots, w^m$ von W . Nach 1.6.13 ist f eindeutig durch die Bilder $f(v^j)$ der Basisvektoren $v^1, \dots, v^n$ gegeben. Diese drücken wir als Linearkombination der Basisvektoren von W aus:

1.7.1

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w^i, \quad j = 1, \dots, n; \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Die a_{ij} ordnen wir zu einem Schema:

1.7.2 Matrix über $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ein solches Schema nennt man eine $(m \times n)$ -Matrix über $\mathbb{K}$. Die a_{ij} nennt man Elemente oder Einträge der Matrix A . Den Vektor $z^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}$ nennt man den i -ten Zeilenvektor, den "Vektor"

$$s^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

den j -ten Spaltenvektor von A . Ist $m = n$, nennt man A auch n -quadratische Matrix: $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet die Menge aller $(m \times n)$ Matrizen. Die Einheitsmatrix E_n und die Nullmatrix $0_{m,n}$ sind

$$E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_n \quad 0_{m,n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_n \quad m$$

1.7.3 Warnung

A hängt von f und der Wahl der Basen B von V und B' von W ab. Eine andere Wahl der Basis liefert eine andere Matrix.

1.7.4 Bezeichnung

Da A von f, B und B' abhängt, schreiben wir

$$A = M_B^{B'}(f)$$

1.7.5

Nach 1.6.13 ist die Abbildung

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \mathbb{K}^{m,n} \quad , m = \dim W \quad , n = \dim V$$

$$f \mapsto M_B^{B'}(f)$$

bijektiv.

Damit überträgt sich die Struktur von $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ auf $K^{m,n}$. Wir wollen das untersuchen. Seien

$$V \xrightarrow{f,g} W \xrightarrow{h} X$$

lineare Abbildungen von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen V mit Basis $B = \{v^1, \dots, v^n\}$, W mit Basis $B' = \{w^1, \dots, w^m\}$ und X mit Basis $B'' = \{x^1, \dots, x^l\}$.

Sei

$$A = (a_{ij}) = M_B^{B'}(f) \quad , B = (b_{ij}) = M_B^{B'}(g) \quad , C = (c_{ij}) = M_B^{B''}(h)$$

d.h.

$$f(v^i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} w^j \quad , g(v^i) = \sum_{j=1}^m b_{ij} w^j \quad , h(w^i) = \sum_{k=1}^l c_{ik} x^k$$

1.7.6 Satz

Mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt:

1. $M_B^{B'}(r * f) = (e_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, mit $e_{ij} = r * a_{ij}$ $\forall r \in \mathbb{K}$
2. $M_B^{B'}(f + g) = (r_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, mit $r_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
3. $M_B^{B''}(h \circ f) = (u_{kj}) \in \mathbb{K}^{l,n}$, mit $u_{kj} = \sum_{i=1}^m c_{ki} * a_{ij}$

Beweis

1. Nach 1.7.1 gilt $(r * f)(v^j) = \sum_{i=1}^m e_{ij} w^i$. Es gilt aber $(r * f)(v^j) = r * f(v^j) = r * \sum_{i=1}^m a_{ij} w^i = \sum_{i=1}^m (r a_{ij}) w^i$. Nach 1.5.4 gilt $e_{ij} = r a_{ij}$
2. Analog gilt $\sum_{i=1}^m r_{ij} w^i = (f + g)(v^j) = f(v^j) + g(v^j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w^i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w^i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w^i$. Es folgt nach 1.5.4 $r_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
3. $\sum_{k=1}^l u_{kj} x^k \stackrel{7.1}{=} (h \circ f)(v^j) = h(f(v^j)) = h(\sum_{i=1}^m a_{ij} w^i) = \sum_{i=1}^m h(a_{ij} w^i) = \sum_{i=1}^m a_{ij} h(w^i) = \sum_{i=1}^m a_{ij} * \sum_{k=1}^l c_{ki} x^k = \sum_{k=1}^l (\sum_{i=1}^m c_{ki} a_{ij}) x^k$. Es folgt: $u_{kj} = \sum_{i=1}^m c_{ki} a_{ij}$.

Das motiviert folgende Strukturen auf den Mengen von Matrizen

1.7.7 Definition: Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation von Matrizen

1. Skalarmultiplikation von Matrizen:

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{m,n}, (r, (a_{ij})) \mapsto (r * a_{ij})$$

2. Addition (beachte: gleiche Indizes)

$$\mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{m,n}, ((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$$

3. Multiplikation (beachte Indizes!!)

$$\mathbb{K}^{l,m} \times \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{l,n}, ((c_{ki}), (a_{ij})) \mapsto (r_{kj})$$

mit $r_{kj} = \sum_{i=1}^m c_{ki} a_{ij}, k = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n$

ACHTUNG: Das Produkt $C * A$ von Matrizen ist nur definiert, wenn die Spaltenanzahl(C) = Zeilenzahl(A) ist !.

Mit Definition 1.7.7 liest sich Satz 1.7.6.

1.7.8

Mit den Bezeichnungen von Satz 1.7.6 gilt:

1. $M_B^{B'}(r * f) = r * M_B^{B'}(f)$
2. $M_B^{B'}(f + g) = M_B^{B'}(f) + M_B^{B'}(g)$
3. $M_B^{B''}(h \circ f) = M_{B'}^{B''}(h) * M_B^{B'}(f)$

1.7.9 Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenanzahl(B) = 3 = Zeilenzahl(A). Also ist $B * A$ definiert:

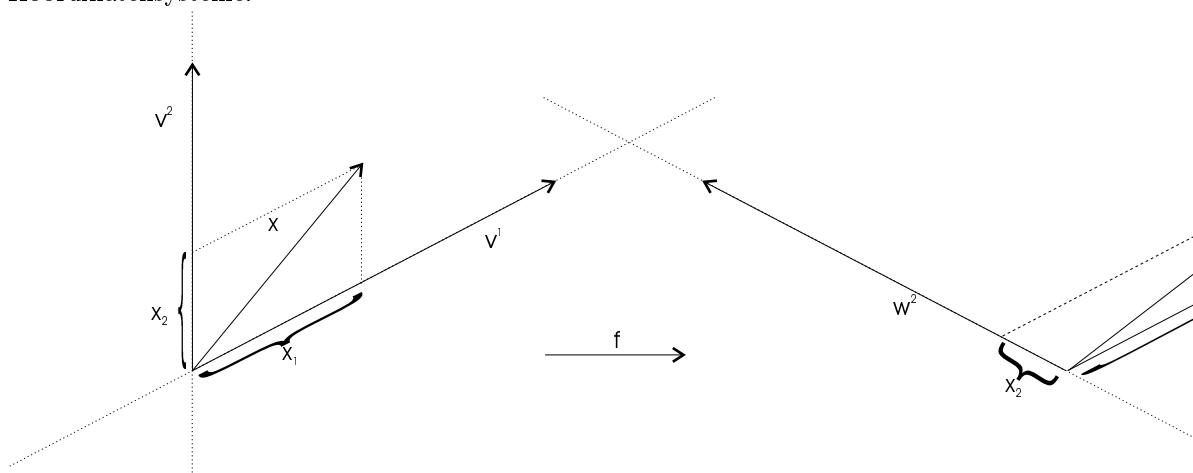
$$B * A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kehren wir nun zur Ausgangsfrage zurück, der rechnerischen Beschreibung linearer Abbildungen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das auch zeigen soll, dass beliebige Basen selbst für Vektorräume $\mathbb{K}^n$ durchaus sinnvoll sein können.

1.7.10 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x - y, x + y)$$

ist eine lineare Abbildung. Als Basen wählen wir $B = \{v^1, v^2\}$, $B' = \{w^1, w^2\}$ mit $v^1 = w^1 = (1, 1)$ und $v^2 = (0, 1)$, $w^2 = (-1, 1)$. Wir erhalten schiefwinkelige Koordinatensysteme:



$$f(v^1) = (3 - 1, 1 + 1) = (2, 2) = 2 * w^1 \quad (*)$$

$$f(v^2) = (-1, 1) = w^2 \quad (**)$$

Also $M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann gilt bezüglich der schiefwinkligen Koordinaten $x = x_1 * v^1 + x_2 * v^2$ (d.h. $x = (x_1, x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^2$) und damit

$$f(x) = x_1 * f(v^1) + x_2 * f(v^2) = 2x_1 w^1 + x_2 w^2$$

Damit können wir das Bild sofort ablesen: Nach $*$ gilt, die w^1 -Komponente ist $2x_1$; nach $**$ ist die w^2 -Komponente gleich x_2 .

1.7.11 Aufgabe

Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, $\dim V = n$, $\dim W = m$, dann gibt es Basen B von V und B' von W , so dass

$$M_B^{B'}(f) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^r & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_n \right\}_m$$

1.7.12 Allgemeiner Fall

Sei $F: V \rightarrow W$ wie in 1.7.1, $A = M_B^{B'}(f) = (a_{ij})$.

Sei $x \in V$ beliebig und $(x_1, \dots, x_n)$ der Koordinatenvektor von x bezüglich B , d.h.

$$x = x_1 v^1 + x_2 v^2 + \dots + x_n v^n = \sum_{j=1}^n x_j v^j$$

Dann folgt

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j * f(v^j) = \sum_{j=1}^n x_j * \sum_{i=1}^m a_{ij} w^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w^i$$

D.h. der Koordinatenvektor $(y_1, \dots, y_m)$ von $f(x)$ bezüglich B' ist gegeben durch $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1.7.13 Konvention

Wegen dieses Sachverhalts schreiben wir die Vektoren in $\mathbb{K}^n$ als Spaltenvektoren!

1.7.14 Spezialfall

$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

Ist $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear, wird 1.7.12 noch schöner, wenn wir die Standardbasen nehmen, denn dann stimmen Vektor und Koordinatenvektor überein. Ist A die Matrix von f bezüglich der Standardbasen, dann gilt

$$f(x) = A * x, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

Nach 1.7.14 ist die Abbildung $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $f_A(x) = A * x$ linear, und

1.7.15

$\mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$A \rightarrow f_A$

ist nach 1.6.13 bijektiv. Nach 1.7.8 geht dabei die Addition, Skalarmultiplikation und Matrizenmultiplikation in die Addition, Skalarmultiplikation und Komposition von linearen Abbildungen über. Damit gelten für $\mathbb{K}^{m,n}$ die Rechenregeln für lineare Abbildungen mit der Komposition durch die Multiplikation ersetzt. Z.B. zeigt man die Assoziativität wie folgt

$$f_{A*(B*C)} \stackrel{7.8}{=} f_A \circ f_{B*C} = f_A \circ (f_B \circ f_C) = (f_A \circ f_B) \circ f_C = f_{A*B} \circ f_C = f_{(A*B)*C}$$

Wegen der Bijektivität von 1.7.15 folgt $A*(B*C) = (A*B)*C$. natürlich kann man das auch direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation herleiten.

Es folgt nach 1.6.24

1.7.16 Satz

$\mathbb{K}^{n,n}$ ist ein Ring.

1.7.17 Warnung

Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ.

Für $A \in \mathbb{K}^{l,m}$, $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist $A * B \in \mathbb{K}^{l,n}$ definiert, aber $B * A$ ist nur dann definiert, wenn $l = n$. In diesem Fall gilt

$$A * B \in \mathbb{K}^{n,n} \quad B * A \in \mathbb{K}^{m,m}$$

Also gilt $A * B = B * A$ höchstens dann, wenn $l = m = n$. Aber selbst in diesem Fall ist die Multiplikation im allgemeinen nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Als Leser-Service seien die Rechenregeln für Matrizen nochmals aufgelistet

1.7.18 Rechenregeln für Matrizen

$$1. (A + B) + C = A + (B + C) \quad , \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$2. A + B = B + A \quad , \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$$

3. Ist (0) die Nullmatrix, deren Einträge alle 0 sind, so gilt:

$$A + (0) = (0) + A = A \quad , A, (0) \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$4. A + (-A) = (0)$$

$$5. (a * b) * A = a * (b * A) \quad , \forall a, b \in \mathbb{K} \quad , \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$6. a * (A + B) = a * A + a * B \quad , \forall a \in \mathbb{K} \quad , \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$7. (a + b) * A = a * A + b * A \quad , \forall a, b \in \mathbb{K} \quad , \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$8. 1 * A = A \quad , \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$9. A * (B * C) = (A * B) * C \quad \forall A \in \mathbb{K}^{k,l} \quad , \forall B \in \mathbb{K}^{l,m} \quad , \forall C \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$10. E_w * A = A * E_n \quad , \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$11. (a * A) * B = A * (a * B) = a * (A * B) \quad , \forall a \in \mathbb{K} \quad , \forall A \in \mathbb{K}^{l,m} \quad , \forall B \in \mathbb{K}^{m,n}$$

Der Vollständigkeit halber formulieren wir noch 1.6.27 in Matrizensprache.

1.7.19 Definition: Links- Rechtsinvers

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Ein linksinverses (rechtsinverses) von A ist eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,m}$ (bzw. $C \in \mathbb{K}^{n,m}$), so dass $B * A = E_n$ (bzw. $A * C = E_n$).

1.7.20 Satz

Besitzt $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ein linksinverses B und ein rechtsinverses C , dann gilt $m = n$ und $B = C$. Diese eindeutig gegebene Matrix wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt also

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E_n$$

Wir übertragen den Rangbegriff 1.6.12 auf Matrizen.

1.7.21 Definition: Rang einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Wir definieren den Rang $\text{rg } A$ durch

$$\text{rg } A = \dim \text{Bild } f_A$$

mit f_A aus 1.7.15.

Da der j -te Spaltenvektor von A gerade $f_A(e^j)$ ist, folgt

1.7.22

$\text{rg}(A) = \text{Maximalanzahl linear unabhängiger Spalten in } A$.

Sei nun $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ Basis von V und $B' = \{w^1, \dots, w^m\}$ Basis von W . Sei $A = M_B^{B'}(f)$. Der Übergang zum Koordinatenvektor bezüglich B definiert einen linearen Isomorphismus

$$\varphi_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

Analog haben wir den lineare Isomorphismus $\varphi_{B'}: W \rightarrow \mathbb{K}^m$. Aus 1.7.12 folgt, dass

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi_B \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi_{B'} \quad \varphi_{B'} \circ f = f_A \circ \varphi_B \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Damit ist $\text{Bild } f \cong \text{Bild } f_A$ vermöge des Isomorphismus $\varphi_{B'}$. Wir erhalten also

1.7.23 Satz

Für jede Wahl von Basen B von V und B' von W gilt

$$\text{rg } f = \text{rg } M_B^{B'}(f)$$

1.8 Grundlagen: Äquivalenzrelationen

Für unsere weiteren Untersuchungen brauchen wir weitere Grundlagen.

1.8.1 Definition: Relation

Sei X eine Menge. Eine Relation auf X ist eine Teilmenge R von $X \times X$. Wir schreiben

$$x R y \iff (x, y) \in R$$

1.8.2 Beispiel

1. Gleichheitsrelation “=” auf X ist $R = \{(x, x); x \in X\}$
Es gilt also: $x R y \iff x = y$
2. Kleiner-Relation auf $\mathbb{Z}$: $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x < y\}$
3. $f: x \rightarrow x_2$ Abbildung $x_1 R x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X; f(x_1) = f(x_2)\}$

Für uns besonders wichtig sind Äquivalenzrelationen.

1.8.3 Definition: Äquivalenzrelation, Repräsentant

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X heisst Äquivalenzrelation wenn gilt:

1. Reflexivität: $x \sim x \quad \forall x \in X$
2. Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \forall x, y \in X$
3. Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z \quad \forall x, y, z \in X$

Die Menge

$$[x] = \{y \in X; x \sim y\} \subset X$$

heisst Äquivalenzklasse von x , ein $y \in [x]$ Repräsentant von $[x]$

1.8.4 Beispiel

Die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation, die Kleiner-Relation dagegen nicht.

1.8.5 Satz

Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge X gilt:

1. $\forall x, y \in X$ gilt: $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$
2. $\forall x, y \in X$ gilt: $[x] = [y] \iff x \sim y$
3. X zerfällt in disjunkte Äquivalenzklassen

Beweis

1. Angenommen $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann gilt $x \sim z$ und $y \sim z$. Es folgt $x \sim z$, $z \sim y$, also $x \sim y$. Ist nun $w \in [y]$, so gilt $y \sim w$. Es folgt $x \sim w$, so dass $w \in [x]$. Also gilt $[y] \subset [x]$. Analog zeigt man $[y] \supset [x]$.
2. “ $\Rightarrow$ ” haben wir gerade gezeigt, “ $\Leftarrow$ ” $x \sim y$; da ausserdem $y \in [y]$, folgt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, also $[x] = [y]$.
3. folgt aus (1).

1.9 Quotienten- und Dualräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Folgende Schreibweise haben wir schon früher benutzt.

1.9.1 Definition

Seien A, B Teilmengen von V und sei $r \in \mathbb{K}$. Wir definieren:

$$A + B = \{a + b ; a \in A, b \in B\}$$

$$r * A = \{r * a ; a \in A\}$$

$$-A = (-1) * A$$

$$A - B = \{a - b ; a \in A, b \in B\} = A + (-B)$$

1.9.2

Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt

$$U + U = U, r * U \subset U, -U = U$$

Beweis

Für $u_1, u_2 \in U$ gilt $u_1 + u_2 \in U$. Es folgt $U + U \subset U$.

Da $0 \in U$, gilt für $u \in U$; $u = 0 + u \in U + U$, also $U \subset U + U$.

Mit $u \in U$ ist auch $r * u \in U$, also $r * U \subset U$.

Für $u \in U$ ist $-u \in U$, also $-U \subset U$. Aber $u = -(-u) \in -U$, also $U \subset -U$.

1.9.3 Definition

Sei U Untervektorraum von V . Wir definieren eine Relation $\sim$ auf V durch $v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$.

1.9.4

$\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation auf V . Die Äquivalenzklasse $[v]$ von $v \in V$ ist die Menge

$$[v] = v + U$$

(wir schreiben kürzer $v + U$ für $\{v\} + U$).

Beweis

Reflexivität: Da $0 \in U$ ist $v - v \in U$, also $v \sim v$.

Symmetrie: $v_1 \sim_U v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = u \in U \Rightarrow v_2 - v_1 = -u \in U \Rightarrow v_2 \sim_U v_1$.

Transitivität: $v_1 \sim_U v_2, v_2 \sim_U v_3 \Rightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U, v_2 - v_3 = u_2 \in U \Rightarrow$

$$v_1 - v_3 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = u_1 + u_2 \in U \Rightarrow v_1 \sim_U v_3$$

$$v_1 \in [v] \iff v \sim_U v_1 \iff v_1 \sim_U v \iff v_1 - v = u \in U \iff \exists u \in U \text{ mit}$$

$$v_1 = v + u \iff v_1 \in v + U.$$

1.9.5 Satz und Definition

Sei U Untervektorraum von V und V/U die Menge der Äquivalenzklassen der Relation $\sim_{\mathbb{K}}$. Dann wird durch die Verknüpfungen

$$[v] + [w] = [v + w]$$

$$r * [v] = [r * v] \quad r \in \mathbb{K}$$

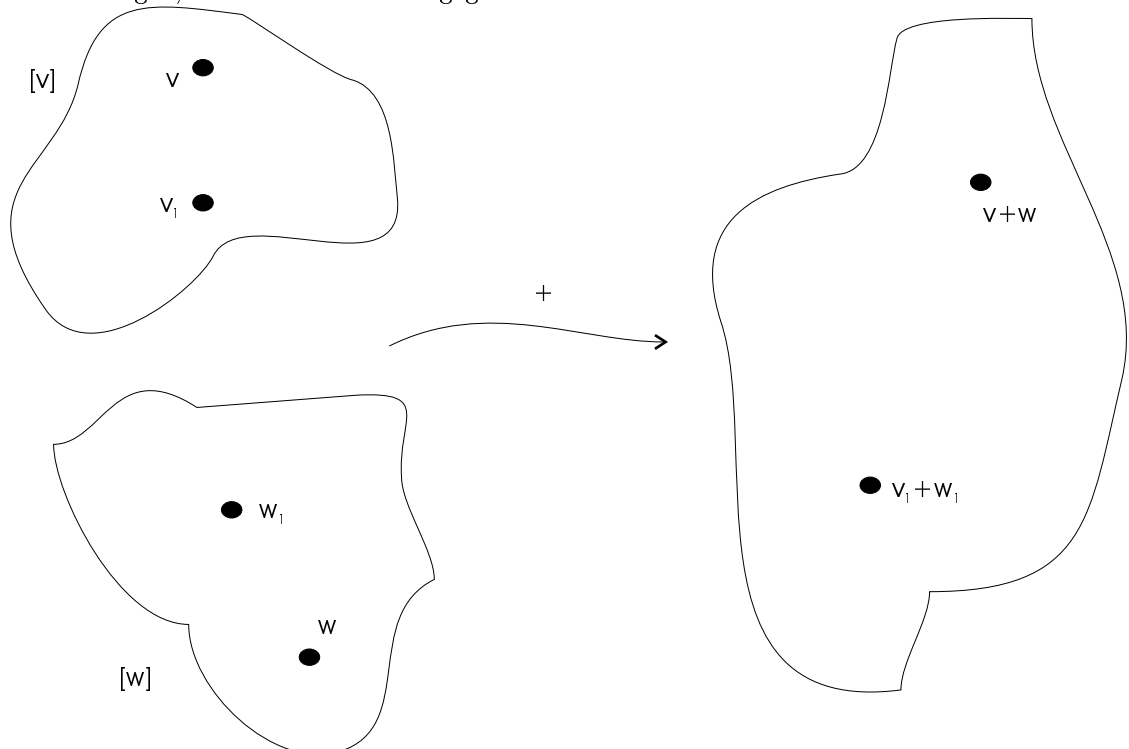
eine $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur auf V/U definiert. Wir nennen V/U mit dieser Struktur den Quotientenraum von V modulo U . Die Abbildung

$$p: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$$

ist linear und wird kanonische Projektion genannt.

Beweis

Wir müssen zunächst nachkontrollieren, dass unsere Verknüpfungen überhaupt vernünftig definiert sind, der Mathematiker nennt das wohldefiniert: Man muss beachten, dass $[v]$ und $[w]$ Teilmengen von V sind und v, w einzelne Elemente dieser Mengen, die willkürlich herausgegriffen werden.



Wir ordnen $[v]$ und $[w]$ die Äquivalenzklasse von $v + w$ zu. Das wäre wenig sinnvoll, wenn bei der Addition anderer Repräsentanten $v_1 \in [v]$ und $w_1 \in [w]$ die Summe $v_1 + w_1$ in einer anderen Äquivalenzklasse als $v + w$ liegt. Wir müssen also zeigen

$$v \sim_U v_1, w \sim_U w_1, r \in \mathbb{K} \Rightarrow v + w \sim_U v_1 + w_1, r * v \sim_U r * v_1$$

Nun gilt $v_1 \in v + U$, $w_1 \in w + U$, also

$$v_1 + w_1 \in v + U + w + U = v + w + U + U = v + w + U$$

$$r * v_1 \in r(v + U) = r * v + r * U \subset r * v + U$$

Also $v + w \sim_U v_1 + w_1$ und $r * v \sim_U r * v_1$.

Die Vektorraumaxiome folgen nun leicht. Wir beweisen exemplarisch die Axiome 1.4.13.3 und 1.4.13.4. Der Nullvektor in V/W ist die Klasse $[0]$, denn:

$$[0] + [v] = [0 + v] = [v]$$

und $-[x]$ ist die Klasse $[-x]$, denn

$$[x] + [-x] = [x - x] = [0] = 0$$

Die Linearität von p prüft man ebenso leicht:

$$p(v + w) = [v + w] = [v] + [w] = p(v) + p(w) \quad , v, w \in V$$

$$p * (r * v) = [r * v] = r * [v] = r * p(v) \quad , r \in \mathbb{K}, v \in V$$

1.9.6 Ergänzung

$$\text{Kern } p = U$$

Beweis

$$v \in \text{Kern } p \iff p(v) = [0] \iff [v] = [0] \iff v \in 0 + U = U$$

Die folgenden beiden Ergebnisse machen die Bedeutung der Quotientenraumkonstruktion deutlich.

1.9.7 Satz

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $U \subset V$ ein Untervektorraum, so dass $U \subset \text{Kern } f$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\bar{f}: V/U \rightarrow W$, so dass $f = \bar{f} \circ p$

$$\text{KOMMUTATIVESDIAGRAMM}$$

Beweis

Wir gehen wie beim Beweis von 1.6.13 vor. Der Eindeutigkeitsbeweis zeigt uns, wie wir $\bar{f}$ definieren müssen.

Eindeutigkeit

Es muss gelten

$$f(v) = \bar{f} \circ p(v) = \bar{f}([v]) \quad , \forall v \in V$$

Existenz

Es bleibt uns also nichts andere übrig, als zu definieren

$$\bar{f}: V/U \rightarrow W, \quad \bar{f}([v]) = f(v)$$

$\bar{f}$ ist wohldefiniert, denn für $v_1 \in [v]$ gilt $v_1 \in v + U$. Also

$$f(v_1) = f(v + U) = f(v) + f(U) = f(v) + 0 = f(v)$$

Damit ist die Zuordnung unabhängig von der Wahl der von $v \in [v] = v + U$.

$\bar{f}$ ist linear, denn

$$\bar{f}([v] + [w]) = \bar{f}([v + w]) = f(v + w) = f(v) + f(w) = \bar{f}([v]) + \bar{f}([w])$$

$$\bar{f}(r * [v]) = \bar{f}([r * v]) = f(r * v) = r * f(v) = r * \bar{f}([v])$$

Für den Spezialfall $U = \text{Kern } f$ erhalten wir

1.9.8 Satz

Ist $f: V \rightarrow W$ linear, dann ist die “induzierte Abbildung” $\bar{f}: V/\text{Kern } f \rightarrow W$ aus 1.9.7 injektiv. Insbesondere definiert $\bar{f}$ einen Isomorphismus

$$V/\text{Kern } f \cong \text{Bild } f$$

Beweis

Sei $\bar{f}([v]) = 0$, also $f(v) = 0$. Dann ist $v \in \text{Kern } f = 0 + \text{Kern } f$, d.h. $v \in [0]$, also $[v] = [0] = 0$. Damit ist $\text{Kern } \bar{f} = \{[0]\}$ und $\bar{f}$ nach 1.6.10 injektiv. Da f als Abbildung $V \rightarrow \text{Bild } f$ surjektiv ist, und $f = \bar{f} \circ p$, ist $\bar{f}$ als Abbildung nach $\text{Bild } f$ surjektiv (1.3.24.2), also ist $\bar{f}$ als Abbildung nach $\text{Bild } f$ bijektiv.

Mit 1.6.20 erhalten wir

1.9.9 Folgerung

Ist $f: V \rightarrow W$ linear und V endlichdimensional, dann gilt

$$V \cong \text{Kern } f \oplus V/\text{Kern } f$$

Insbesondere gilt $\dim V = \dim \text{Kern } f + \dim V/\text{Kern } f$.

Die zweite wichtige Konstruktion dieses Abschnitts ist der Dualraum.

1.9.10 Definition: Dualraum, Linearform, Duale Abbildung

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$$

heißt Dualraum von V . Die Elemente $\varphi \in V^*$ heißen Linearformen auf V .

Ist $f: V \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt die (nach 1.6.21.3) lineare Abbildung:

$$f^*: W^* \rightarrow V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

die duale Abbildung von f .

1.9.11 Beispiel

Sei P der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynomfunktionen $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (wir überlassen den Nachweis der Vektorraumaxiome dem Leser).

Wir definieren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in P^*$ durch

$$\varphi_1(q) = \int_0^1 q \, dx \quad , \varphi_2(q) = q(0) \quad , \varphi_3(q) = q'(0)$$

wobei q' die Ableitung von q ist. Alle drei sind Linearformen, denn

$$\int_0^1 (q_1 + q_2) \, dx = \int_0^1 q_1 \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 r q \, dx = r \int_0^1 q \, dx \quad , r \in \mathbb{K}$$

$$(q_1 + q_2)(0) = q_1(0) + q_2(0) \quad \text{und} \quad (rq)(0) = r * q(0) \quad \text{nach 1.4.15}$$

$$(q_1 + q_2)' = q_1' + q_2' \quad \text{und} \quad (rq)' = r * q'$$

Behauptung

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind linear unabhängig in P^*

Beweis

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$a * \varphi_1 + b * \varphi_2 + c * \varphi_3 = 0$$

d.h.

$$a * \varphi_1(q) + b * \varphi_2(q) + c * \varphi_3(q) = 0 \quad , \forall q \in P$$

Für $q = c^2 - \frac{1}{3}$ erhalten wir

$$\varphi_1(q) = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x \right]_0^1 = 0 \quad , \varphi_2(q) = - \quad , \varphi_3(q) = 0$$

Es folgt $b = 0$.

Für $q = 1$ erhalten wir

$$\varphi_1(q) = 1 \quad , \varphi_3(q) = 0$$

Es folgt $a = 0$, da ja $b = 0$. Für $q = x$ ist $\varphi_3(q) = 1$, also auch $c = 0$.

1.9.12 Funktionelle Eigenschaften

1. $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$
2. Sind $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ $\mathbb{K}$ -linear, so gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: W^* \rightarrow U^*$$

Beweis

1. ist klar
2. Sei $\varphi \in W^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \mathbb{K})$. Dann gilt

$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi)$$

Sei nun V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit der Basis $B = \{v^1, \dots, v^n\}$. Nehmen wir $1 \in \mathbb{K}$ als Basis von $\mathbb{K}$, so ist $\varphi \in V^*$ eindeutig durch den Zeilenvektor

$$M_B^{\{1\}}(\varphi) = (y_1, \dots, y_n) \quad , \text{ mit } y_i = \varphi(v^i)$$

gegeben. Wir erhalten damit eine Zuordnung

$$V^* \rightarrow \mathbb{K}^n$$

die nach 1.6.13 und 1.7 ein linearer Isomorphismus ist. Insbesondere ist $\dim V^* = n = \dim V$. Diese Abbildung bildet die Linearform

$$\varphi^i: V \rightarrow \mathbb{K}$$

die durch

1.9.13

$$\varphi^i(v^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

eindeutig gegeben ist, auf den i -ten Einheitsvektor e^i ab. Wir erhalten

1.9.14 Satz und Definition

Die in 1.9.13 definierten Linearformen $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ bilden eine Basis von V^* , genannt die zu B duale Basis.

1.9.15 Bezeichnung: Kronecker-Symbol

Das Symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ nennt man Kronecker-Symbol.

1.9.16 Bemerkung

In der Physik schreibt man oft $\langle \varphi | v \rangle$ für $\varphi(v)$. Die Auswertungsabbildung

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad , (\varphi, v) \mapsto \varphi(v) = \langle \varphi | v \rangle$$

nennt man auch duale Paarung.

Ist $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ Basis von V , dann heisst

$$\langle \varphi | v^i \rangle = \varphi(v^i)$$

i -ter Fourier-Koeffizient von φ bezüglich B . Es gilt

$$\varphi = \langle \varphi | v^1 \rangle * \varphi^1 + \cdots + \langle \varphi | v^n \rangle * \varphi^n$$

wobei $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ die duale Basis B^* ist. Nach 1.6.13 genügt es, diese Gleichung für die Basis B zu testen:

$$(\langle \varphi | v^1 \rangle * \varphi^1 + \cdots + \langle \varphi | v^n \rangle * \varphi^n)(v^j) = \langle \varphi | v^1 \rangle * \varphi^1(v^j) + \cdots + \langle \varphi | v^n \rangle * \varphi^n(v^j) = \sum_{i=1}^n \langle \varphi | v^i \rangle \delta_{ij}$$

Sei nun $f: V \rightarrow W$ $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ Basis von V , $B' = \{w^1, \dots, w^m\}$ Basis von W , $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ und $B'^* = \{\psi^1, \dots, \psi^m\}$ die dazu dualen Basen. Sei $A = M_B^{B'}(f) = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$. Wir wollen

$$B = M_{B'^*}^{B^*}(f^*) = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$$

bestimmen. Nach Definition gilt

$$f^*(\psi^i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \varphi^j$$

$$f^*(\psi^i) = \psi^i \circ f = \sum_{j=1}^n \langle \psi^i \circ f | v^j \rangle * \varphi^j \quad \text{nach 1.9.16}$$

Es folgt

$$b_{ij} = (\psi^i \circ f)(v^j) = \psi^i\left(\sum_{k=1}^n a_{kj} w^k\right) = \sum_{k=1}^n a_{kj} * \psi^i(w^k) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij}$$

1.9.17 Definition: Transponierte Matrix

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine Matrix. Dann heisst die Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,m}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ die zu A transponierte Matrix und wird mit A^t bezeichnet. Wir haben damit gezeigt.

1.9.18 Satz

Sei $f: V \rightarrow W$ $\mathbb{K}$ -linear, B Basis von V , B' Basis von W und B^*, B'^* die dazu dualen Basen. Dann gilt für $f^*: W^* \rightarrow V^*$

$$M_{B'^*}^{B^*}(f^*) = (M_B^{B'}(f))^t$$

1.9.19 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9.20 Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n,l}$. Dann gilt

$$(A * B)^t = B^t * A^t$$

Beweis

Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ und $A * B = (c_{ik})$, also

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} * b_{jk}$$

Sei $A^t = (\bar{a}_{ij})$, $B^t = (\bar{b}_{kj})$ und $(A * B)^t = (\bar{c}_{ki})$, also $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$, $\bar{b}_{kj} = b_{jk}$ und $\bar{c}_{ki} = c_{ik}$. Wir schreiben

$$\bar{c}_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} * b_{jk} = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{kj} * \bar{a}_{ji}$$

was zu zeigen war.

1.9.21 Aufgabe

Beweisen Sie 1.9.20 mit Hilfe von 1.9.12.2 und 1.9.18.

Wenden wir uns wieder linearen Abbildungen zu.

1.9.22 Satz

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann gilt

1. f injektiv $\Rightarrow f^*$ surjektiv
2. f surjektiv $\Rightarrow f^*$ injektiv

Beweis

1. Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ Basis von V . Da f injektiv ist, sind $f(v^1), \dots, f(v^n)$ linear unabhängig. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Basis

$$B = \{f(v^1), \dots, f(v^n), z^{n+1}, \dots, z^m\}$$

von W . Sei $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}$ Linearform auf V und $\psi: W \rightarrow \mathbb{K}$ die Linearform auf W , die auf der Basis B gegeben ist durch

$$\psi(f(v^i)) = \varphi(v^i) \quad , \quad \psi(z^j) = 0$$

Dann gilt $f^*\psi(v^i) = \psi \circ f(v^i) = \varphi(v^i)$. Es folgt $f^*(\psi) = \varphi$. Also ist f^* surjektiv.

2. Seien ψ_1, ψ_2 Linearformen auf W , so dass $f^*(\psi_1) = f^*(\psi_2)$, also $\psi_1 \circ f = \psi_2 \circ f$. Ist $w \in W$ beliebig, dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$, da f surjektiv ist. Es folgt $\psi_1(w) = \psi_1 \circ f(v) = \psi_2 \circ f(v) = \psi_2(w)$, also $\psi_1 = \psi_2$. Damit ist f^* injektiv.

1.9.23 Folgerung

Sei $f: V \rightarrow W$ lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann gilt

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^*$$

Beweis

Sei $\bar{f}: V \rightarrow \text{Bild } f$ lineare Abbildung $v \mapsto f(v)$ und $g: \text{Bild } f \rightarrow W$ die Einbettung $w \mapsto w$, d.h. es gilt $f = g \circ \bar{f}$, also $f^* = \bar{f}^* \circ g^*$. Da $\bar{f}$ surjektiv ist und g injektiv ist, ist g^* surjektiv und $\bar{f}^*$ injektiv. Es folgt

$$\text{rg } f = \dim \text{Bild } f = \dim(\text{Bild } f)^* = \dim \text{Bild } \bar{f}^* = \dim \text{Bild } (f^*) = \text{rg } f^*$$

1.9.24 Folgerung

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{rg } A &= \text{Maximalanzahl linear unabhängiger Spalten} \\ &= \text{Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilen} \\ &= \text{Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der zugehörigen} \\ &\quad \text{oberen Dreiecksform (die Zahl } r \text{ in 1.1.8)} \end{aligned}$$

Beweis

Die erste Gleichung ist 1.9.22. Sei $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung $x \mapsto A * x$. nach 1.9.18 ist $f_{A^t}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ die zu f_A duale Abbildung f_A^* , so dass $\text{rg } A^t = \text{rg } A$ nach 1.9.23. Damit folgt die zweite Gleichung. Aus 1.5.19 folgt dann die dritte Gleichung.

1.9.25 Aufgabe

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bezüglich beliebig vorgegebener Basen B von V und B' von W . Zeigen Sie

1. f injektiv $\iff \text{rg } A = n \leq m$
2. f surjektiv $\iff \text{rg } A = m \leq n$
3. f bijektiv $\iff \text{rg } A = m = n \iff A$ ist invertierbar

Wir behandeln zum Abschluss einen für Mathematik und Physik gleichermassen wichtigen Begriff.

1.9.26 Definition: Bidualraum

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann heisst

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K})$$

Bidualraum von V .

1.9.27 Satz

Die Abbildung $\tau: V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto \hat{v}$ mit

$$\hat{v}: V^* \rightarrow \mathbb{K}, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

ist $\mathbb{K}$ -linear und für jede $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ ist

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \tau_V \downarrow & & \downarrow \tau_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

kommutativ.

Beweis

1. Wir müssen zeigen, dass $\hat{v}$ eine lineare Abbildung ist:

$$\hat{v}(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = \hat{v}(\varphi) + \hat{v}(\psi), \varphi, \psi \in V^*$$

$$\hat{v}(r * \varphi) = (r * \varphi)(v) = r * \varphi(v) = r * \hat{v}(\varphi), \varphi \in V^*, r \in \mathbb{K}$$

2. τ_V ist $\mathbb{K}$ -linear: Für $\varphi \in V^*$, $v, w \in V$ und $r \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\widehat{v+w}(\varphi) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \hat{v}(\varphi) + \hat{w}(\varphi) = (\hat{v} + \hat{w})(\varphi)$$

$$\widehat{r*v}(\varphi) = \varphi(r*v) = r*\varphi(v) = r*\hat{v}(\varphi) = (r*\hat{v})(\varphi)$$

Also $\tau_V(v+w) = \widehat{v+w} = \hat{v} + \hat{w} = \tau_V(v) + \tau_V(w)$ und analog $\tau_V(r*v) = r*\tau_V(v)$.

3. Sei nun $f: V \rightarrow W$ $\mathbb{K}$ -linear und $v \in V$. Dann ist

$$(f^{**} \circ \tau_V)(v) = f^{**}(\hat{v}) = \hat{v} \circ f^*: W^* \rightarrow \mathbb{K}$$

die lineare Abbildung $\varphi \mapsto \hat{v} \circ f^*(\varphi) = f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v))$, und

$$(\tau_W \circ f)(v) = \tau_W(f(v)) = \widehat{f(v)}: W^* \rightarrow \mathbb{K}$$

die lineare Abbildung $\varphi \mapsto \widehat{f(v)}(\varphi) = \varphi(f(v))$.

1.9.28 Ergänzung

Ist V endlichdimensional, dann ist τ_V ein Isomorphismus.

Beweis

Nach 1.9.14 ist $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Daher genügt es nach 1.9.22 zu zeigen, dass τ_V injektiv ist. Sei $v \neq 0$. Wir ergänzen v zu einer Basis $B = \{v, v^2, v^3, \dots, v^n\}$ von V und definieren eine Linearform $\varphi \in V^*$ durch $\varphi(v) = 1$ und $\varphi(v^i) = 0$ für $i \geq 2$. Es folgt

$$\hat{v}(\varphi) = \varphi(v) = 1$$

Also ist $\hat{v} \neq 0$. Damit ist $\text{Kern } \tau_V = \{0\}$, denn kein $v \neq 0$ liegt im Kern. Also ist τ_V injektiv.

1.9.29 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ vom Rang r . Zeigen Sie: Durch Wegstreichen von geeigneten $m - r$ Zeilen und $n - r$ Spalten kann man eine r -quadratische Untermatrix vom Rang r finden.

1.10 Ergänzung zu linearen Gleichungssystemen

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

1.10.1

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & + \cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & + \cdots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

1.10.2

Sei

$$\begin{array}{ccccccc} x_{q_1} & \cdots & y_{q_r} & x_{q_{r+1}} & \cdots & x_{q_n} & b \\ 1 & a'_{12} & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}$$

das zugehörige obere Dreiecksschema und

1.10.3

$$\begin{array}{ccccccc} x_{q_1} & \cdots & y_{q_r} & x_{q_{r+1}} & \cdots & x_{q_n} & b \\ 1 & & 0 & a^*_{1r+1} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & a^*_{rr+1} & \cdots & a^*_{rn} & b^*_r \end{array}$$

das zugehörige reduzierte Schema. Weiter sei $A = (a_{ij})$ die Koeffizientenmatrix, und $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ die Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sei $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung $x \mapsto A * x$. In der Sprache der linearen Abbildungen suchen wir also $x \in \mathbb{K}^n$, so dass

$$f_A(x) = A * x = b$$

Die Lösbarkeit von 1.10.1 ist also gleichbedeutend mit der Bedingung dass $b \in \text{Bild } f_A$.

1.10.4 Definition: Erweiterte Matrix

Sind $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m,l}$, so bezeichnet $(A|B) \in \mathbb{K}^{m,n+l}$ die Matrix, die aus A durch Anhängen von B entsteht. Die Matrix $(A|b)$ nennt man die erweiterte Matrix des Gleichungssystems.

Aus 1.9.24 wissen wir, dass r der Rang der Matrix A ist. Die Lösbarkeitsbedingung 1.1.10 erhält somit die Form

1.10.1 ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}^\circ$ des zugehörigen homogenen Systems ist

$$\mathbb{L}^\circ = \{x \in \mathbb{K}^n ; f_A(x) = 0\} = \operatorname{Kern} f_A$$

Da $\dim(\operatorname{Bild} f_A) = r$ und $\dim \operatorname{Bild} f_A + \dim \operatorname{Kern} f_A = \dim \mathbb{K}^n = n$, ist

$$\dim \mathbb{L}^\circ = \dim \operatorname{Kern} f_A = n - r$$

Wenn 1.10.1 also eine Lösung besitzt, ist die Lösungsmenge ein $(n-r)$ -dimensionaler affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Wir fassen zusammen.

1.10.5 Satz

1. Für das Gleichungssystem 1.10.1 sind äquivalent
 - (a) $A * x = b$ ist lösbar
 - (b) $b \in \operatorname{Bild} f_A = \operatorname{Span}\{s^1, \dots, s^n\}$, $s^j = j$ -ter Spaltenvektor von A
 - (c) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$
2. $\operatorname{Kern} f_A$ hat die Dimension $n - \operatorname{rg} A = n - r$ und ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems
3. Ist x° Lösung von $A * x = b$, dann ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = x^\circ + \operatorname{Kern} f_A$$

ein $(n - r)$ -dimensionaler affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Wir wenden uns jetzt den bisher etwas stiefmütterlich behandelten affinen Unterräumen zu.

1.10.6 Definition: Kodimension, Hyperebene

Ist $L \subset \mathbb{K}^n$ ein k -dimensionaler affiner Unterraum, dann heisst

$$\operatorname{codim} L = n - k$$

die Kodimension von L . Ist $\operatorname{codim} L = 1$ (also $\dim L = n - 1$), heisst L Hyperebene in $\mathbb{K}^n$.

1.10.7 Bemerkung

Die leere Menge $\emptyset$ wird auch als affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$ angesehen, doch legt man sich bei ihrer Dimension nicht fest. Man vereinbart nur $\dim \emptyset < 0$ und $\operatorname{codim} \emptyset > n$.

1.10.8 Satz

Für eine Teilmenge $L \subset \mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

1. L ist affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$ der Dimension k .
2. $\exists$ Matrix $A \in \mathbb{K}^{n-k,n}$ vom Rang $n-k$ und ein $b \in \mathbb{K}^{n-k}$, so dass L die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A * x = b$ ist.

Beweis

(2) $\Rightarrow$ (1)

ist 1c

(1) $\Rightarrow$ (2)

Wir geben ein konstruktives Verfahren, das A und b konstruiert. Sei $L = x^\circ + V$ mit einem k -dimensionalen Untervektorraum $V \subset \mathbb{K}^n$. Sei $B = \{v^1, \dots, v^k\}$ Basis von V und $B \in \mathbb{K}^{n,k}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $v^1, \dots, v^k$. Da $\text{rg } B = \text{rg } B^t = k$, hat das Gleichungssystem

$$B^t * x = 0$$

mit k Gleichungen in n Unbekannten einen $(n-k)$ -dimensionalen Untervektorraum $U \subset \mathbb{K}^n$ als Lösungsmenge. Gleichzeitig liefert der Gauss-Algorithmus eine Basis $\{u^1, \dots, u^{n-k}\}$ von U . Sei C die Matrix mit den Spaltenvektoren $u^1, \dots, u^{n-k}$. Wegen $B^t * u^j = 0$ für $j = 1, \dots, n-k$ folgt direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation

$$B^t * C = 0$$

Also $0 = (B^t * C)^t = C^t * B$. Setzen wir $A = C^t$, folgt $A * v^j = 0$ für $j = 1, \dots, k$. Da $\dim \text{Kern } f_A = n - \text{rg } A = n - \text{rg } C = n - (n-k) = k$ und alle v^j im Kern liegen, ist $\{v^1, \dots, v^k\}$ Basis von $\text{Kern } f_A$, und somit $\text{Kern } f_A = V$. Setzen wir nun $b = f_A(x^\circ) = A * x^\circ$, folgt

$$f_A(L) = f_A(x^\circ + V) = f_A(x^\circ) + f(V) = b + 0 = b$$

Aus Dimensionsgründen ist L die ganze Lösungsmenge.

1.10.9 Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Also } x^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 0 \\ -x_2 - x_3 & & = 0 \end{array}$$

Die reduzierte Form ist:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

Der Lösungsraum hat den Vektor

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis. Damit ist A die (1×3) -Matrix $(1 \ -1 \ 1)$, $b = u^{1^t} * x^o = (2)$
Also ist L die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

1.10.10 Satz

Sind $L_1, L_2 \subset \mathbb{K}^n$ affine Unterräume, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ ein affiner Unterraum, und es gilt

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \quad \text{oder} \quad \text{codim}(L_1 \cap L_2) \leq \text{codim } L_1 + \text{codim } L_2$$

Beweis

Sei $\dim L_1 = k$, $\dim L_2 = l$. nach 1.10.8 gibt es $A \in \mathbb{K}^{n-k,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n-l,n}$, $b \in \mathbb{K}^{n-k}$ und $c \in \mathbb{K}^{n-l}$, so dass L_1 und L_2 die Lösungsmengen von

$$A * x = b \quad \text{bzw.} \quad B * x = c$$

sind. $L_1 \cap L_2$ ist damit die Lösungsmenge beider Gleichungssysteme, d.h. aller $x \in \mathbb{K}^n$, für die

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \quad (*)$$

Da $\text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \text{rg } A + \text{rg } B$, gilt im Falle $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

$$\text{codim}(L_1 \cap L_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \text{rg } A \leq \text{rg } B = \text{codim } L_1 + \text{codim } L_2$$

1.10.11 Definition: Allgemeine Lage

Man sagt, zwei Unterräume $L_1, L_2 \subset \mathbb{K}^n$ sind in allgemeiner Lage, wenn

$$\text{codim}(L_1 \cap L_2) = \text{codim } L_1 + \text{codim } L_2$$

1.10.12 Bemerkung

1. Ist $\text{codim } L_1 + \text{codim } L_2 > n$, so sind L_1 und L_2 genau dann in allgemeiner Lage, wenn $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
2. Ist $\text{codim } L_1 + \text{codim } L_2 \leq n$ und sind L_1 und L_2 in allgemeiner Lage, so ist $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ und $L_1 \cap L_2$ hat die kleinstmögliche Dimension nämlich

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - n$$

1.10.13 Beispiel

1. Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind in allgemeiner Lage, wenn sie sich nicht schneiden. ihre Kodimension ist 2
2. Eine Gerade und eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ sind in allgemeiner Lage, wenn sie sich in einem Punkt schneiden
3. Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind in allgemeiner Lage, wenn sie nicht parallel sind, d.h. sich in einer Geraden schneiden

An den Beispielen sehen wir: Sind zwei affine Unterräume in allgemeiner Lage “wackelt” man an ihnen nur wenig, bleiben sie in allgemeiner Lage. Sind sie dagegen nicht in allgemeiner Lage, kann man sie durch eine geschickte kleine Änderung in allgemeine Lage bringen.

1.10.14 Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem wie in 1.10.1, und wir wollen annehmen, dass es genau eine Lösung hat. Das ist nur möglich, wenn $m = n$.

Dann ist $r = n$ im reduzierten Schema 1.10.3, und die Koeffizientenmatrix A ist nach 3 invertierbar. Es folgt

$$A * x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = A^{-1} * b$$

Kennt man A^{-1} , kann man die Lösung sofort angeben. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn man das Gleichungssystem für verschiedene b lösen will. Wir wollen jetzt ein Verfahren vorstellen, wie man A^{-1} effektiv berechnen kann. Sei also

$$A^{-1} = (x_{ij})$$

Aus $A * A^{-1} = E_n = (\delta_{ij})$ und der Definition des Matrizenproduktes folgt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk} = \delta_{ik}$$

Für jedes fest gewählte k müssen wir also ein Gleichungssystem:

$$A * y^k = e^k \quad k = 1, \dots, n$$

mit $y^k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$ und e^k , dem k -ten Einheitsvektor, lösen.

Das machen wir simultan. Das Ausgangsschema wäre damit

1.10.15

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \vdots & e^1 & e^2 & \cdots & e^n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & & & 1 \end{array}$$

Da $r = n$, kann man den Gauss-Algorithmus ohne Spaltenvertauschung durchführen, so dass man folgendes reduziertes Schema erhält:

1.10.16

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \vdots & e^1 & e^2 & \cdots & e^n \\
 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & b_{11}^* & b_{12}^* & \cdots & b_{1n}^* \\
 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & b_{21}^* & b_{22}^* & \cdots & b_{2n}^* \\
 \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & b_{n1}^* & b_{n2}^* & \cdots & b_{nn}^*
 \end{array}$$

Wir können sofort ablesen, dass

$$y^k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1k}^* \\ \vdots \\ b_{nk}^* \end{pmatrix}$$

die eindeutige Lösung ist, d.h.

1.10.17 Satz

$$A^{-1} = (b_{ij}^*)$$

1.11 Determinanten

In sehr vielen Anwendungen hat man Gleichungssysteme

$$A * x = b$$

die für jedes b genau eine Lösung besitzen. Wir wissen bereits, dass das gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

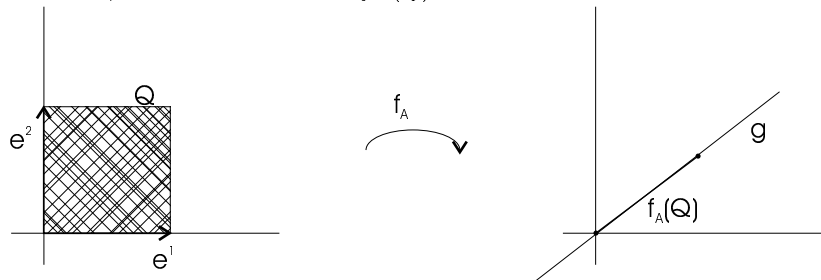
bijektiv ist. Das wiederum ist gleichbedeutend damit, dass $m = n$, also A eine n -quadratische Matrix ist, und dass A invertierbar ist.

Die Invertierbarkeit von A können wir mit Hilfe des Gauss-Algorithmus testen: A ist genau dann invertierbar, wenn $\text{rg}(A) = n$. Beim Gauss-Algorithmus müssen wir in der Regel dividieren, ein lästiges Unterfangen, das selbst beim Einsatz von Computern wegen eventueller kritischer Rundungsfehler nicht ganz unproblematisch ist. Schon ein kleiner Fehler kann eine Null zerstören. Wir hätten daher gern ein anderes Kriterium, das auch für den Einsatz von Computern besser geeignet ist.

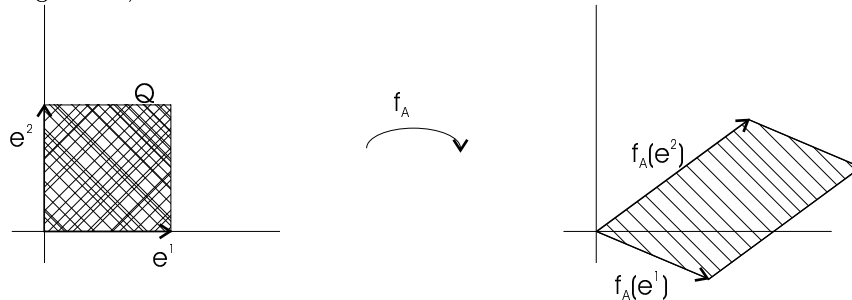
Dazu eine Vorüberlegung. Sei A eine n -quadratische Matrix und $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Ist A nicht invertierbar dann ist f_A nicht injektiv 1.6.28 und damit $\text{Kern } f_A \neq \{0\}$. Es gibt aber ein $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ mit $f_A(x) = 0$. Schauen wir uns im $\mathbb{R}^2$ an: Ist $\{e^1, e^2\}$ die Standardbasis, gilt für $x = (x_1, x_2)$

$$x = x_1 * e^1 + x_2 * e^2$$

Es folgt: $0 = f_A(x) = x_1 * f_A(e^1) + x_2 * f_A(e^2)$, also $-x_1 * f_A(e^1) = x_2 * f_A(e^2)$. Damit liegen $f_A(e^1)$ und $f_A(e^2)$ auf einer Geraden g durch den Nullpunkt. Das Einheitsquadrat wird also auf eine Strecke auf dieser Geraden abgebildet. Das bedeutet, dass die Fläche von $f_A(Q)$ Null ist.



Ist f_A dagegen bijektiv, so bildet $\{f_A(e^1), f_A(e^2)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und das Einheitsquadrat wird auf das von $f_A(e^1)$ und $f_A(e^2)$ definierte Parallelogramm abgebildet, dessen Flächeninhalt von 0 verschieden ist.



1.11.1 Vermutung

f_A ist genau dann bijektiv, wenn es den durch die Vektoren $e^1, \dots, e^n$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ gegebenen Einheitswürfel auf ein Parallelotop mit Volumen $\neq 0$ abbildet.

1.11.2 Aufgabe

Überlegen Sie sich präzise Definitionen für den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ und das durch Vektoren $v^1, \dots, v^n$ bestimmte Parallelotop.

Während diese Aufgabe recht einfach zu lösen ist, wenn man sich von der Anschauung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ leiten lässt, ist das Problem, wie man sinnvollerweise Volumina im $\mathbb{R}^n$ definiert schon schwieriger. An diesem Beispiel lässt sich mathematische Formalisierung besonders schön automatisieren.

1.11.3 Bezeichnung: Volumen eines Parallelotops

Sind $v^1, \dots, v^n$ beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^n$, dann bezeichnet

$$D(v^1, \dots, v^n)$$

das noch zu definierende Volumen des von $v^1, \dots, v^n$ beschriebenen Parallelotops.

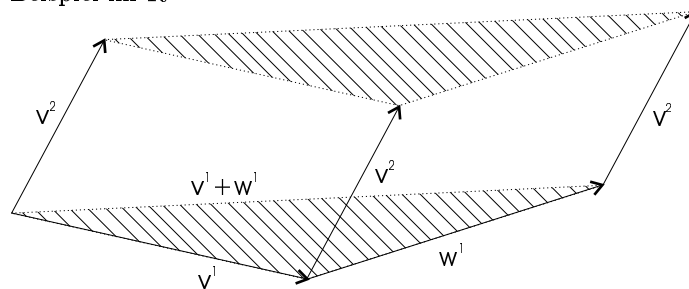
Wir verlangen nun von $D(v^1, \dots, v^n)$ ein paar naheliegende Eigenschaften und wollen dann untersuchen, ob daraus eine vernünftige Definition wird.

1.11.4 Gewünschte Eigenschaften von $D(v^1, \dots, v^n)$

1. Der n -dimensionale Einheitswürfel sollte das Volumen 1 haben, d.h.

$$D(e^1, e^2, \dots, e^n) = 1$$

2. • Addition zweier Parallelotope:
Beispiel im $\mathbb{R}^2$



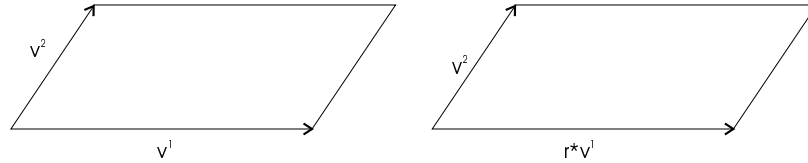
Die gestreiften Dreiecke haben denselben Flächeninhalt, so dass im $\mathbb{R}^2$ gilt

$$D(v^1, v^2) + D(w^1, v^2) = D(v^1 + w^1, v^2)$$

Daher fordern wir im $\mathbb{R}^n$: Sind $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}^n$ und $w^i \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$D(v^1, \dots, v^i, \dots, v^n) + D(v^1, \dots, w^i, \dots, v^n) = D(v^1, \dots, v^i + w^i, \dots, v^n)$$

- Multiplikation eines $v^i \in \mathbb{R}^n$ mit einem $r \in \mathbb{R}$:



Im $\mathbb{R}^2$ gilt offensichtlich $D(r \cdot v^1, v^2) = r \cdot D(v^1, v^2)$. Allgemein:

$$D(v^1, v^2, \dots, r \cdot v^i, \dots, v^n) = r \cdot D(v^1, v^2, \dots, v^i, \dots, v^n)$$

3. Sind zwei der Vektoren $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}^n$ gleich, liegt das durch sie definierte Parallelotop im Untervektorraum, der von diesen Vektoren aufgespannt wird, also in einem Teilraum von niedriger Dimension. Das n -dimensionale Volumen dieses Parallelotops ist somit 0, so wie ein Parallelotop in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ das 3-dimensionale Volumen Null hat. Also

$$D(v^1, \dots, v^2) = 0 \quad \text{falls } v^i = v^j \quad \text{für ein } i \neq j$$

Das sind sicherlich Minimalforderungen, die wir an den Volumenbegriff stellen können. Über eine Forderung sollten wir aber noch nachdenken.

Ist r im 2. Teil von D2 negativ, erhalten wir ein negatives Volumen. Ist das sinnvoll? Wir könnten das durch die Forderung umgehen, dass

$$D(v^1, \dots, r \cdot v^i, \dots, v^n) = |r| \cdot D(v^1, \dots, v^i, \dots, v^n)$$

Eine solche Festlegung hätte aber viele Nachteile: D2 bedeutet, dass für jedes $i = 1, \dots, n$ und festgewählte Vektoren $v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^n$ die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D(v^1, \dots, v^{i-1}, x, v^{i+1}, \dots, v^n)$$

$\mathbb{R}$ -linear ist. d.h.

$$D: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v^1, \dots, v^n) \mapsto D(v^1, \dots, v^n)$$

ist in jeder der n Variablen (bei Festhalten der anderen) $\mathbb{R}$ -linear. Eine solche Abbildung nennt man daher multilinear, und lineare Abbildungen haben wir hinlänglich studiert.

Zum anderen wissen zumindest einige der Hörer, dass es im Zusammenhang der Integralrechnung durchaus sinnvoll ist, mit negativen Flächeninhalten zu argumentieren. Man spricht dann von orientierten Flächen. Eine Umkehrung der Orientierung führt zu einer Vorzeichenänderung beim Flächeninhalt mit sich. Um den geometrischen Flächeninhalt zu erhalten, muss man zum Absolutbetrag übergehen.

Nach diesen Vorbetrachtungen definieren wir (salopp)

1.11.5 Definition: Orientierte Volumenfunktion, Determinante

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine orientierte Volumenfunktion für Parallelotope im $\mathbb{K}^n$, gewöhnlich Determinante genannt, ist eine Abbildung

$$D: \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad (v^1, \dots, v^n) \mapsto D(v^1, \dots, v^n)$$

so dass folgende Axiome gelten:

1. $D(e^1, \dots, e^n) = 1$
2. $D(v^1, \dots, v^i, \dots, v^n) \neq D(v^1, \dots, w^i, \dots, v^n) = D(v^1, \dots, v^i + w^i, \dots, v^n)$
 $D(v^1, \dots, r * v^i, \dots, v^n) = r * D(v^1, \dots, v^i, \dots, v^n)$
 $\forall v^1, \dots, v^n, w^i \in \mathbb{K}^n, \forall r \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \dots, n$
3. $D(v^1, \dots, v^n) = 0$, falls $v^i = v^{i+1}$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Wie bereits erwähnt, ist Axiom D2 gleichbedeutend damit, dass D multilinear ist.

1.11.6 Definition: Multilinear, Multilinearform

Seien $V_1, V_2, \dots, V_n$ und W $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

heißt multilinear, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ und für jede Familie fest gewählter Vektoren $\{v^j \in V_j; j \neq i\}$ die Abbildung

$$f_i: V_i \rightarrow W, \quad x \mapsto f(v^1, \dots, v^{i-1}, x, v^{i+1}, \dots, v^n)$$

$\mathbb{K}$ -linear ist. Ist $W = \mathbb{K}$, spricht man von einer Multilinearform.

Noch wissen wir nicht, ob Determinanten existieren, und wenn ja, wie viele verschieden es gibt. Antwort gibt folgender zentraler Satz, dessen Beweis aber einige Vorbereitungen bedarf.

1.11.7 Satz: Eindeutigkeit der Determinante

Für jedes $n \geq 1$ gibt es genau eine Determinante

$$D: \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Wie im Beweis von 1.6.13 erläutert, empfiehlt es sich, zunächst die Eindeutigkeit von D zu zeigen in der Hoffnung, dass diese Untersuchung Hinweise auf die Konstruktion liefert. Wir nehmen daher zunächst an, dass es ein solches D gibt. Zunächst beweisen wir die multilineare Version von 1.6.13.

1.11.8 Satz

Seien $V_1, \dots, V_n$ endlich dimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorräume, $\dim V_i = r_i$ und $B_i = \{v^{i1}, \dots, v^{ir_i}\}$ sei Basis von $V_i, i = 1, \dots, n$.

Sei W beliebiger $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Zu jedem "Multiindex" $(j_1, \dots, j_n)$ mit $1 \leq j_k \leq r_k, k = 1, \dots, n$ sei ein Vektorraum $y^{j_1, \dots, j_n} \in W$ gegeben. Dann gibt es genau eine multilineare Abbildung

$$f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

mit $\underbrace{f(v^{1j_1}, \dots, v^{nj_n})}_{(*)} = y^{j_1, \dots, j_n}$ für jeden Multiindex $(j_1, \dots, j_n)$.

Beweis

Es hat sich bisher als gute Strategie erwiesen, zunächst die Eindeutigkeit einer solchen multilinearen Abbildung anzugehen. Dieser Strategie bleiben wir treu:

Eindeutigkeit

Sei also f eine multilineare Abbildung wie in der Aussage des Satzes und $(x^1, \dots, x^n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ ein beliebiges Element.

Da B_i Basis von V_i ist, hat x^i eine eindeutige Darstellung der Form

$$x^i = a_{i1}v^{i1} + \dots + a_{ir_i}v^{ir_i}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= \sum_{j_1=1}^{r_1} a_{1j_1} f(v^{1j_1}, x^2, \dots, x^n) && \text{Linierität in 1. Variablen} \\ &= \sum_{j_1=1}^{r_1} a_{1j_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} a_{2j_2} f(v^{1j_1}, v^{2j_2}, x^3, \dots, x^n) && \text{Linierität in 2. Variablen} \\ &= \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} a_{1j_1} a_{2j_2} f(v^{1j_1}, v^{2j_2}, x^3, \dots, x^n) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} \dots \sum_{j_n=1}^{r_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} f(v^{1j_1}, \dots, v^{nj_n}) && \text{Linierität in } n \text{ Variablen} \\ &= \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} \dots \sum_{j_n=1}^{r_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} y^{j_1, \dots, j_n} && (**) \end{aligned}$$

Da für jede multilineare Abbildung, die die Bedingungen (*) des Satzes erfüllt, die Gleichung (**) gilt, sind diese Abbildungen alle gleich.

Existenz**1.11.9 Definition: Alternierende multilineare Abbildung**

Eine multilineare Abbildung $f: V \times \dots \times V \rightarrow W$ heisst alternierend, wenn $f(x^1, \dots, x^n) = 0$, falls $x^i = x^{i+1}$ für ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$

1.11.10 Lemma

Für eine alternierende multilineare Abbildung $f: V \times \dots \times V \rightarrow W$ gilt:

1. $f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^n) = -f(x^1, \dots, \underbrace{x^j}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, \underbrace{x^i}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x^n)$
2. $f(x^1, \dots, x^n) = 0$, falls $x^i = x^j$ für ein $i \neq j$

1.11.11

Ist $f: \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ eine alternierende n -Form (d.h. Multilinearform in n Variablen) und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die Standardbasis, dann folgt aus 1.11.8 und seinem Beweis:

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j_1=1}^n x_{1j_1} * \cdots * x_{nj_n} * f(e^{j_1}, \dots, e^{j_n})$$

falls $x^i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. Die Werte $f(e^{j_1}, \dots, e^{j_n})$ sind nach 1.11.10 aber Null, falls $j_k = j_l$ für ein $k \neq l$, d.h. $f(e^{j_1}, \dots, e^{j_n})$ ist höchstens dann von Null verschieden, falls alle Indizes $j_1, \dots, j_n$ verschieden sind, d.h. $(j_1, \dots, j_n)$ besteht genau aus den Zahlen $1, \dots, n$ aber in anderer Anordnung.

1.11.12 Definition: Permutation

Eine permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist eine Umordnung dieser Menge, d.h. ein Tupel $(j_1, \dots, j_n)$ von Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$, so dass $j_k \neq j_l$ für $k \neq l$.

Es folgt: $f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} x_{1j_1} * \cdots * x_{nj_n} * f(e^{j_1}, \dots, e^{j_n})$ wobei $(j_1, \dots, j_n)$ alle Permutationen durchläuft.

Nach 1.11.10 sind die Werte $f(e^{j_1}, \dots, e^{j_n})$ aber bereits durch $f(e^1, \dots, e^n)$ festgelegt.

Sei $(j_1, \dots, j_n)$ eine Permutation. Wir vertauschen j_1 mit $1 \in (j_1, \dots, j_n)$, falls $j_1 \neq 1$ erhalten einen Ausdruck $(1, j_2, \dots, j_n)$. Dann vertauschen wir j_2 mit 2, falls $j_2 \neq 2$ usw.

1.11.13 Bezeichnung: Vorzeichen einer Permutation

Sei k die Anzahl der Vertauschungen, die wir insgesamt gemacht haben um $(j_1, \dots, j_n)$ nach $(1, \dots, n)$ zu überführen. Dann heisst $\text{sign}(j_1, \dots, j_n) = (-1)^k$ das Vorzeichen der Permutation.

1.11.14 Satz

Für eine alternierende n -Form $f: \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ gilt

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \text{sign}(j_1, \dots, j_n) * x_{1j_1} * \cdots * x_{nj_n} * f(e^1, \dots, e^n)$$

wobei $(j_1, \dots, j_n)$ alle Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft und $x^i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. Da eine Determinante eine alternierende n -Form ist, erhalten wir mit D1.

1.11.15 Satz

$D(x^1, \dots, x^n) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \text{sign}(j_1, \dots, j_n) * x_{1j_1} * \cdots * x_{nj_n}$, wobei $(j_1, \dots, j_n)$ die Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft.

Damit ist die Eindeutigkeit der Determinante gezeigt.

1.11.16 Bezeichnung

Um Schreibarbeit zu minimieren, fasst man x^i als i -ten Zeilenvektor einer n -quadratischen Matrix $A = (x_{ij})$ auf und benutzt das Symbol:

$$D(A) = D(x^1, \dots, x^n) = D A = |A|$$

Nach bewährtem Rezept könnten wir nun die Formel 1.11.15 zur Definition einer Determinanten hernehmen und zeigen, dass die so definierte Abbildung die Axiome D1, D2 und D3 erfüllt. Das ist für D1 und D2 einfach, bei D3 geraten wir aber in Schwierigkeiten. Deshalb beschreiten wir ausnahmsweise einen anderen Weg, der ausserdem den Vorteil hat, eine von 1.11.15 abweichende Berechnungsmöglichkeit der Determinante zu liefern. Mit der Bezeichnung von 1.11.16 ist die Determinante eine Abbildung.

$$D = D_n: \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$$

Wir konstruieren D_n durch Induktion nach n .

1.11.17

$$D_1: \mathbb{K}^{1,1} = \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, D_1(x) = x \quad \text{ist eine Determinante}$$

1.11.18 Bezeichnung

Für eine n -quadratische Matrix A und $1 \leq i, j \leq n$ bezeichne A_{ij} die $(n-1)$ -quadratische Matrix, die aus A durch Weglassen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

Induktionsschritt**Behauptung****Nachweis von D1****Nachweis von D2****Nachweis von D3****1.11.19 Bezeichnung: Entwicklung nach der j -ten Spalte**

Die induktive Berechnung der Determinante mit Hilfe der Formel 1.11.18 nennt man Entwicklung nach der j -ten Spalte.

1.11.20 Bemerkung

Sei $(j_1, \dots, j_n)$ eine Permutation. $\text{sign}(j_1, \dots, j_n)$ haben wir über eine spezielle Folge von Vertauschungen definiert, die $(j_1, \dots, j_n)$ in $(1, \dots, n)$ überführen. Wählen wir nun eine beliebige Folge von l Vertauschungen, die $(j_1, \dots, j_n)$ in $(1, \dots, n)$ überführen, so gilt nach 1.11.10 und 1.11.15, da D existiert:

$$\text{sign}(j_1, \dots, j_n) = D(e^{j_1}, \dots, e^{j_n}) = (-1)^l D(e^1, \dots, e^n) = (-1)^l$$

Haben wir also zwei Folgen von k bzw. l Vertauschungen, die $(j_1, \dots, j_n)$ in $(1, \dots, n)$ überführen, so gilt:

$$(-1)^k = \text{sign}(j_1, \dots, j_n) = (-1)^l$$

d.h. k und l sind beide entweder gerade oder beide ungerade.

1.11.21 Beispiel

$(\underbrace{3, 2, 1}) \mapsto (1, 2, 3)$ eine Vertauschung

$(\underbrace{3, 2, 1}) \mapsto (\underbrace{3, 1, 2}) \mapsto (\underbrace{1, 3, 2}) \mapsto (1, 2, 3)$ drei Vertauschungen.

Da wir wissen, dass die Determinante existiert, können wir sie in den unteren Dimensionen leicht mit Hilfe der Formel 1.11.15 berechnen.

1.11.22 Beispiel

- $D_1: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $D_1 = \text{id}$

- $D_2: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ Wir haben die Permutationen $(1, 2)$ und $(2, 1)$

$$D_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11} * x_{22} - x_{12} * x_{21}$$

- $D_3: \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ Wir haben 6 Permutationen.
 $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)$ Die ersten drei haben positives, die letzten drei haben negatives Vorzeichen. Zur Berechnung von

$$D_3 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = D_3(A)$$

ergänzt man das Matrixschema zu

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{array}$$

und multipliziert entlang der Linien. Von links oben, nach rechts unten gibt ein positives, von links unten nach rechts oben, ein negatives Vorzeichen.

$$D_3(A) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33}$$

1.11.23 Bezeichnung

$\sum_n$ bezeichne die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$

1.11.24 Aufgabe

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $\sum_n n!$ Elemente besitzt.

Nach 1.11.24 gibt es 24 Permutationen $(j_1, \dots, j_n)$. Damit wird die explizite Berechnung von $D_n(A)$ für $n \geq 4$ schon ziemlich aufwendig. Zum Glück können wir mit Hilfe der Linearität und des Lemmas 1.11.10 Zeilenoperationen und damit eine Art Gauss-Algorithmus zur Vereinfachung anwenden.

1.11.25 Lemma

Ist $f: V \times \dots \times V \rightarrow W$ alternierende multilineare Abbildung und $r \in \mathbb{K}$, so gilt für $i \neq j$

$$f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^n) = f(x, \dots, x^i + r * x^j, \dots, x^j, \dots, x^n)$$

Beweis

1.11.26

$$D \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} * a_{22} * \cdots * a_{nn}$$

1.11.27 Satz

Für eine n -quadratische Matrix gilt

$$D(A) = D(A^t)$$

Eine Permutation $(j_1, \dots, j_n)$ können wir auch als bijektive Abbildung

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, k \mapsto j_k$$

auffassen. Da $j_k \neq j_l$ für $k \neq l$, ist σ injektiv und damit auch bijektiv. Da jede bijektive Abbildung genau eine Umkehrabbildung besitzt ist die Zuordnung

$$\sum_n \rightarrow \sum_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

bijektiv. Benutzen wir diese Interpretation einer Permutation, so gilt

$$x_{1j_1} * \cdots * x_{nj_n} = x_{1\sigma(1)} * \cdots * x_{n\sigma(n)}$$

Wir vertauschen die Faktoren in diesem Produkt so, dass sie nach dem 2. Index statt nach dem 1. geordnet sind. Man beachte dabei, dass jede Zahl $k \in \{1, \dots, n\}$ genau einmal unter $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ auftritt. Man beachte weiter, dass der Faktor mit dem 2. Index k gerade $x_{\sigma^{-1}(k), k}$ ist. Da die Zuordnung $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv ist, folgt aus 1.11.15

DIE FORMEL IST DOOF, WEIL MAN DAS SUMMENZEICHEN IN DER

INDIZIERUNG BRAUCHT

$$\begin{aligned}
 D(A) &= \sum_{\sigma \in \sum n} x_{1,\sigma(1)} * \cdots * x_{n,\sigma(n)} * \text{sign}(\sigma) \\
 &= \\
 &\stackrel{*}{=} \\
 &\stackrel{**}{=} \\
 &= D(A^t)
 \end{aligned}$$

Gleichung (*) ist Umbenennung von σ nach σ^{-1} . Gleichung (**) benutzt, dass $\sigma^{-1} \mapsto \sigma$ bijektiv ist und $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$. Letzteres ist klar, denn die Vertauschungen, die man für den Übergang von σ nach $\text{id} = (1, \dots, n)$ braucht, muss man bei σ^{-1} gerade rückgängig machen.

1.11.28 Folgerung: Entwicklung nach der i -ten Zeile

Sei i fest gewählt

$$D_i(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_{ij} * D_{n-1}(A_{ij}) \quad , \text{ für } A = (x_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$$

Als weiteres wichtiges Ergebnis zeigen wir

1.11.29 Satz

$D: \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ ist multiplikativ, d.h.

$$D(A * B) = D(A) * D(B)$$

Beweis

Kommen wir abschliessend auf unser ursprüngliches Problem zurück

1.11.30 Satz

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist invertierbar $\iff D(A) \neq 0$

Beweis

Wir können aber noch erheblich mehr sagen. Dafür beweisen wir zunächst

1.11.31 Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Matrix mit den Zeilenvektoren $x^1, \dots, x^n$ und den Spaltenvektoren $y^1, \dots, y^n$. Dann gilt:

$$D(x^1, \dots, x^{i-1}, e^j, x^{i+1}, \dots, x^n) = (-1)^{i+j} D(A_{ij}) = D(y^1, \dots, y^{j-1}, e^i, y^{j+1}, \dots, y^n)$$

Beweis

Entwickeln wir nach der i -ten Zeile, erhalten wir die linke Gleichung, entwickeln wir nach der j -ten Spalte, erhalten wir die rechte.

1.11.32 Definition: Adjungierte Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann heisst die Matrix $A^* = (a_{ij}^*) \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit

$$a_j^* = (-1)^{i+j} D(A_{ji})$$

(beachte die Reihenfolge der Indizes) die zu A adjungierte Matrix.

1.11.33 Satz

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt:

$$A * A^* = A^* * A = D(A) * E_n$$

Insbesondere gilt: Ist $D(A) \neq 0$, so ist A invertierbar und

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * A^*$$

Sei x^i der i -te Zeilenvektor und $A * A^* = C = (c_{ik})$. Es gilt mit 1.11.31

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} * a_{jk}^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{j+k} D(A_{kj}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} * D(x^1, \dots, x^{k-1}, e^j, x^{k+1}, \dots, x^n) \\ &= D(x^1, \dots, x^{k-1}, \sum_{j=1}^n a_{ij} e^j, x^{k+1}, \dots, x^n) \\ &= D(x^1, \dots, x^{k-1}, x^i, x^{k+1}, \dots, x^n) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ D(A) & i = k \end{cases} \quad \text{nach 1.11.10.2} \end{aligned}$$

Da Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, muss man auch $A^* * A = D(A)$ nachweisen. Das macht man genauso mit Hilfe der Spaltenvektoren y^j von A und der 2. Formel aus 1.11.31.

Alternativ kann man auch folgendes Resultat benutzen.

1.11.34 Aufgabe

Zeigen Sie:

$$(A^t)^* = (A^*)^t$$

Als weitere wichtige Anwendung zeigen wir.

1.11.35 Cramer'sche Regel

Sei A eine n -quadratische invertierbare Matrix mit den Spaltenvektoren $a^1, \dots, a^n$. Dann hat das lineare Gleichungssystem

$$A * x = b$$

für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $x = A^{-1} * b$. Für die i -te Komponente x_i von x gilt:

$$x_i = \frac{D(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{D(A)}$$

Beweis

Wir wollen noch zwei Beispiele exemplarisch behandeln. Zur Berechnung von Determinanten stehen uns die Entwicklungssätze 1.11.19 und 1.11.28, die Zeilenmanipulationen 1.11.5.D3 und 1.11.25 zur Verfügung, und wegen 1.11.27 auch die entsprechenden Spaltenmanipulationen.

1.11.36 Beispiel: Berechnung einer Determinante

$$\begin{aligned} D \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\stackrel{(1)}{=} D \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} D \begin{pmatrix} 8 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3)}{=} D \begin{pmatrix} 8 & 1 & -9 \\ -6 & 0 & 14 \\ -1 & 0 & 133 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} -D \begin{pmatrix} -6 & & \\ -1 & 13 & \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{=} 6 * 13 - 14 = 64 \end{aligned}$$

In (1) subtrahieren wir Vielfache der ersten Zeile von den übrigen, in (2) entwickeln wir nach der ersten Spalte, in (3) subtrahieren wir die erste Zeile von den übrigen, in (4) entwickeln wir nach der 2. Spalte, in (5) benutzen wir 1.11.22.

1.11.37 Vandermondsche Determinante

Für $x_1, \dots, x_n$ mit $n \geq 2$ sei

$$V(x_1, \dots, x_n) = D \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Behauptung**Beweis****Induktionsschritt**

Nach Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung.

Kapitel 2

Lineare Endomorphismen

In diesem Kapitel untersuchen wir Endomorphismen $f: V \rightarrow V$ endlichdimensionaler Vektorräume V . Wir wollen dabei f in möglichst einfacher Form beschreiben, indem wir eine geeignete Basis auswählen. D.h. wir suchen eine Basis B von V , so dass die Matrix $M_B^B(f)$ eine übersichtliche Form erhält.

Aus (7.11) wissen wir, dass es solche Formen gibt, wenn man die Basen im Definitions- und Wertebereich unabhängig voneinander wählen darf. Jetzt soll die Basis im Definitionsbereich dieselbe wie im Wertebereich sein.

2.12 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$f: V \rightarrow V$$

eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung.

2.12.1 Definition: Invariant

Ein Untervektorraum $U \subset V$ heisst f -invariant, wenn

$$f(U) \subset U$$

2.12.2 Beispiel

1. Da $f(0) = 0$, sind die Untervektorräume $\{0\}$ und V stets f -invariant
2. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann besitzt $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto A * x$ ausser $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ keine f_A -invarianten Untervektorräume. Sei etwa $U \neq \{0\}$ ein f_A -invarianter Untervektorraum und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U$, so gilt $f_A(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Ist $x \neq 0$, so sind x und $f_A(x)$ linear unabhängig, denn

$$D \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 \neq 0$$

Da $f_A(x) \in U$ ist, ist $\dim U = 2$, also $U = \mathbb{R}^2$.

3. Sei A wie in 2, wir betrachten aber f_A als Abbildung

$$f_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Hier ist die Situation wesentlich anders:

$$U_1 = \mathbb{C} * \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 = \mathbb{C} * \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

sind f_A -invariante, komplexe 1-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} A * \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i * \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = f_A \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in U_1 \\ A * \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i * \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = f_A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in U_2 \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, folgt

$$\mathbb{C}^2 = U_1 \oplus U_2$$

Nehmen wir $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ als Basis von $\mathbb{C}^2$, erhalten wir aus unseren Berechnungen

$$M_B^B(f_A) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Bezüglich diese "Koordinatensystems" ist f_A besonders einfach zu beschreiben: Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von $v \in \mathbb{C}^2$ bezüglich B , so

erhält man den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ von $f_A(v)$ bezüglich B durch einfache Multiplikation jeder Komponenten:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_B^B(f_A) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i * x_1 \\ -i * x_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3 zeigt, dass f -invariante Unterräume entscheidend zum globalen Verständnis der Abbildung f beitragen können. Das folgende Ergebnis zeigt, dass dies auch im allgemeinen Fall so ist:

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum. $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subset V$ ein f -invarianter Unterraum. Dann können wir f zu einem Endomorphismus

$$\hat{f}: U \rightarrow U \quad u \mapsto f(u)$$

einschränken. Wir wählen eine Basis $\hat{B} = \{v^1, \dots, v^k\}$ von U und ergänzen diese zu einer Basis $B = \{v^1, \dots, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$ von V .

2.12.3 Satz

Mit diesen Bezeichnungen gilt. $M_B^B(f)$ ist eine Blockmatrix der Form

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \hat{A} & B \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \hat{A} = M_{\hat{B}}^{\hat{B}}(\hat{f}), \bar{A} \in \mathbb{K}^{n-k, n-k}, B \in \mathbb{K}^{k, n-k}$$

2.12.4 Definition: Komplementärraum

Ist U Untervektorraum eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums V , so nennt man einen Untervektorraum U' von V Komplementärraum von U , falls $V = U \oplus U'$.

2.12.5 Warnung

Zu einem Untervektorraum $U \subset V$ gibt es i.a. viele Komplementäräume. Betrachte z.B. $U = \mathbb{R} * e^1 \subset \mathbb{R}^2$, dann ist jeder Raum $U' = \mathbb{R} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $y \neq 0$ ein Komplementärraum von U (BEIM KOPIEREN VERSCHWUNDEN).

Wir könnten nun das Glück haben, dass unser f -invariantes U einen f -invarianten Komplementärraum $\bar{U}$ besitzt. Wir wählen eine Basis $\bar{B} = \{v^{k+1}, \dots, v^n\}$ von $\bar{U}$. Dann ist nach 2.12.4 $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von B . Der Endomorphismus f schränkt zu einem Endomorphismus

$$\bar{f}: \bar{U} \rightarrow \bar{U}, \bar{u} \mapsto f(\bar{u})$$

ein. Für $j > k$ gilt dann $f(v^j) = \bar{f}(v^j) \in \bar{U}$, also

$$f(v^j) = 0 * v^1 + \dots + 0 * v^k + a_{k+1,j} * v^{k+1} + \dots + a_{n,j} * v^n$$

Wir erhalten zusammen mit 2.12.3

2.12.6 Satz

Ist U ein f -invarianter Teilraum von V und $\bar{U}$ ein f -invarianter Komplementärraum von U , dann gilt bezüglich der getroffenen Basiswahl

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \hat{A} = M_{\hat{B}}^{\hat{B}}(\hat{f}) \quad \text{und } \bar{A} = M_{\bar{B}}^{\bar{B}}(\bar{f})$$

Wie wir in 2.12.3 gesehen haben, können wir einen Endomorphismus f dann am einfachsten beschreiben, wenn wir eine Basis von V finden bezüglich der f durch eine Diagonalmatrix $A = (a_{ij})$ beschrieben wird. d.h. $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

2.12.7 Definition: Diagonalisierbar

Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heisst diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, so dass $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heisst diagonalisierbar, wenn $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ diagonalisierbar ist.

2.12.8 Satz

1. Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ sind äquivalent
 - (a) f ist diagonalisierbar
 - (b) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, wobei $\dim U_i = 1$ und U_i f -invariant ist für $i = 1, \dots, n$
2. $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist diagonalisierbar $\iff$ es gibt eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n,n}$ und eine Diagonalmatrix D , so dass $T * A * T^{-1} = D$

2.12.9 Beispiel

Aus den Beispielen 2.12.2 folgt mit 2.12.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, aber nicht über $\mathbb{R}$.

Wir wollen die Matrix $T \in \mathbb{C}^{2,2}$ bestimmen, für die $T * A * T^{-1}$ von Diagonalgestalt ist. Wie wir gezeigt haben, hat $M_B^B(f_A)$ für $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ Diagonalgestalt $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Die Transformationsmatrix T ist $M_B^B(\text{id})$. Nun gilt:

$$e^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, e^2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix}$$

Um einen Endomorphismus zu diagonalisieren, müssen wir also f -invariante 1-dimensionale Unterräume finden. Dies ist unser nächstes Ziel:

2.12.10 Definition: Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ heisst Eigenwert von f , wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt, so dass $f(v) = \lambda * v$
2. ein solches v heisst Eigenvektor von f zum Eigenwert λ
3. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert, so heisst

$$E(\lambda) = \text{Kern}(f - \lambda * \text{id})$$

Eigenraum von f zum Eigenwert λ .

2.12.11 Erste Beobachtungen

1. Ist v ein Eigenvektor von f (zum Eigenwert λ), dann ist $\mathbb{K} * v$ ein 1-dimensionaler f -invarianter Teilraum von V .
Denn ist $a * v \in \mathbb{K} * v$, gilt $f(a * v) = a * f(v) = (a * \lambda) * v \in \mathbb{K} * v$
2. $E(\lambda)$ enthält ausser dem Nullvektor genau die Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Beweis

Sei $v \neq 0$. Es gilt: $v \in E(\lambda) \iff (f - \lambda * \text{id})(v) = 0 \iff f(v) = \lambda * v$.

3. $E(\lambda)$ ist f invarianter Teilraum von V (folgt aus 1 und 2). Da es ein $v \neq 0$ in $E(\lambda)$ gibt, ist $\dim E(\lambda) = 1$
4. Aus 2 folgt: Die Einschränkung von f auf $E(\lambda)$ ist gegeben durch

$$\lambda * \text{id}: E(\lambda) \rightarrow E(\lambda), v \mapsto f(v) = \lambda * v$$

5. Aus 2.12.8.1 folgt: f ist diagonalisierbar $\iff V$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von f .

2.12.12 Beispiel

$f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus 2.12.2.2 besitzt keinen Eigenwert und keinen Eigenvektor, da es keinen 1-dimensionalen invarianten Teilraum hat.

Im Beispiel 2.12.2.3 besitzt $f_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ die Eigenwerte i und $-i$. Die Eigenräume $E(i)$ und $E(-i)$ sind beide 1-dimensional. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert i und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-i$.

2.12.13 Satz

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f . Dann gilt:

1. Ist v^i Eigenvektor zu $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ dann sind $v^1, \dots, v^m$ linear unabhängig
2. Die Summe der Eigenräume $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_m)$ ist direkt, d.h.

$$E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m) \subset V$$

Es folgt: $\sum_{i=1}^m \dim E(\lambda_i) \leq \dim V = n$

Beweis

- 1.
- 2.

Unser nächstes Problem ist es, Eigenwerte und ihre zugehörigen Eigenräume zu finden. $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert, wenn die Abbildung

$$\lambda * \text{id} - f: V \rightarrow V$$

einen nicht-trivialen Kern hat. Da V endlichdimensional ist, ist das gleichbedeutend damit, dass $\lambda * \text{id} - f$ nicht invertierbar ist. Dafür genügt es nachzuweisen, dass

$$M_B^B(\lambda * \text{id} - f) = \lambda * M_B^B(\text{id}) - M_B^B(f) = \lambda * E_n - M_B^B(f)$$

nicht invertierbar ist, wobei B eine beliebige Basis von V ist (vergleiche 1.7). Die Nichtinvertierbarkeit von Matrizen kann man aber mit Hilfe ihrer Determinante testen 1.11.31.

Sei also $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Wir betrachten

$$D(\lambda * E_n - A)$$

2.12.14 Lemma

$P_A = D(\lambda * E_n - A)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Unbestimmten λ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ von der Form

$$P_A = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0, \quad c_i \in \mathbb{K}$$

mit $c_{n-1} = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$ und $c_0 = (-1)^n * D A$.

Beweis

2.12.15 Definition: Charakteristisches Polynom, Spur

1. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heisst $P_A = D(\lambda * E_n - A)$ das charakteristische Polynom von A in der Unbestimmten λ .
2. Ist $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und B eine Basis von V , dann heisst

$$P_f = P_A \quad \text{mit} \quad A = M_B^B(f) = (a_{ij})$$

das charakteristische Polynom von f , und

$$D(f) = D M_B^B(f)$$

die Determinante von f und

$$\text{Tr}(f) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{Tr}(M_B^B(f))$$

die Spur von f bzw. von A

Zunächst hängen $P_f, D(f)$ und $\text{Tr}(f)$ von der Wahl der Basis ab, womit die Definition nicht sonderlich sinnvoll wäre. Aber es gilt

2.12.16 Lemma

$P_f, D(f)$ und $\text{Tr}(f)$ hängen nicht von der Wahl von B ab.

Beweis

Nach unseren Überlegungen ist $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann Eigenwert von f , wenn $\lambda * \text{id} - f$ nicht bijektiv ist, d.h. wenn $D(\lambda * \text{id} - f) = 0$ ist. Also gilt

2.12.17 Satz

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert von $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, wenn λ Nullstelle des Polynoms P_f ist.

2.12.18 Beispiel

Sei $f: V \rightarrow V$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, beschrieben bezüglich einer Basis B von V durch die Matrix

$$\begin{aligned} M_B^B(f) = A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ P_f &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 3 & \lambda + 2 & -3 \\ 2 & 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda * (\lambda + 2) * (\lambda - 3) - 6 - 6 + 2(\lambda + 2) - 3(\lambda - 3) + 6\lambda \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 * (\lambda + 1) \end{aligned}$$

Also hat f die Eigenwerte 1 und -1 .

Da $\text{Kern}(f - \lambda * \text{id}) = \text{Kern}(-(f - \lambda * \text{id})) = \text{Kern}(\lambda * \text{id} - f)$ und

$$\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda = 1 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda = -1$$

ist $\dim E(1) = \dim \text{Kern}(\text{id} - f) = 2$, weil $\text{rg}(E_3 - A) = 1$, und

$\dim E(-1) = \dim \text{Kern}(-\text{id} - f) = 1$, weil $\text{rg}(-E_3 - A) = 2$.

Es folgt: $V = E(1) \oplus E(-1)$ nach 2.12.13. Damit besitzt V eine Basis von Eigenvektoren, und f ist diagonalisierbar.

2.12.19 Beispiel

Wir betrachten dieselbe Matrix über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Dann ist sie von der Form

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P_f &= D \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1) + (\lambda + 1) = (\lambda + 1)^3 \end{aligned}$$

(Das hätten wir auch direkt aus P_f von Beispiel 2.12.18 herleiten können).

Wir haben genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 1$.

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1. Damit ist $\dim E(1) = 2 \neq \dim V = 3$. Also ist f über $\mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar.

In beiden Beispielen ist das charakteristische Polynom ein Produkt linearer Polynome. Es stellt sich gleich heraus, dass das ein Kriterium für die Diagonalisierbarkeit ist.

2.12.20 Definition: Linearfaktor

Sei P ein Polynom über dem Körper $\mathbb{K}$, d.h. die Koeffizienten liegen in $\mathbb{K}$. Wir sagen, P zerfällt in Linearfaktoren, wenn

$$P = (X - \lambda_1)^{r_1} * \dots * (X - \lambda_k)^{r_k}$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $r_i > 0$, nennt man r_i die Ordnung der Nullstelle λ_i von P und schreibt auch $r_i = v_{\lambda_i}(P)$.

2.12.21 Lemma

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und λ Eigenwert von f . Dann gilt

$$\dim E(\lambda) \leq v_{\lambda}(P_f)$$

2.12.22 Satz

$f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind

1. P_f zerfällt in Linearfaktoren
2. Für jeden Eigenwert λ von f gilt $v_{\lambda}(P_f) = \dim E(\lambda)$.

Beweis

2.12.23 Korollar

Besitzt $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ n verschiedene Eigenwerte ($n = \dim V$), so ist f diagonalisierbar.

2.13 Polynomringe

Die Ergebnisse des Abschnitts 2.12 sind für uns Veranlassung, uns näher mit Polynomen zu befassen. In den Übungen haben wir Polynome als Funktionen $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ behandelt. In der Algebra sind aber Polynome normale Ausdrücke, die u.a. “Polynomfunktionen” definieren.

2.13.1 Beispiel

Die als formale Ausdrücke verschiedenen Polynome über $\mathbb{F}_3$

$$X^3 + X + [2] \quad \text{und} \quad [2] * X + [2]$$

Sind als “Funktionen” $\mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3$ gleich. Als algebraische Objekte werden sie aber als verschieden angesehen.

2.13.2 Definition: Polynom, Koeffizientenfolge, Grad

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (die Definition gilt wörtlich auch für Ringe).

Ein Polynom in der Unbestimmten X mit Koeffizienten in K ist ein formaler Ausdruck:

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=0}^n a_iX^i$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $X^0 = 1 \in \mathbb{K}$, $X^1 = X$. Wir nennen $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ die Koeffizientenfolge (sie besteht ab einer gewissen Stelle nur aus Nulle). $\text{grad } P = \max\{k \in \mathbb{N}; a_k \neq 0\}$ heisst der Grad der von P , d.h. die Koeffizienten a_i von P sind für $i > \text{grad } P$ stets 0.

Zwei Polynome P und Q heissen gleich, wenn ihre Koeffizientenfolgen gleich sind. Mit $\mathbb{K}[X]$ bezeichnen wir die Menge aller Polynome “über $\mathbb{K}$ ”.

2.13.3 Addition und Multiplikation

Seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ und seien $(a_0, a_1, \dots)$ und $(b_0, b_1, \dots)$ die Koeffizientenfolgen von P bzw. Q , d.h.

$$P = \sum_{i=0}^n a_iX^i, \quad n = \text{grad } P, \quad Q = \sum_{i=0}^m b_iX^i, \quad m = \text{grad } Q$$

Wir definieren:

$P + Q$ ist das Polynom mit den Koeffizientenfolgen

$$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$P * Q$ ist das Polynom mit der Koeffizientenfolge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, wobei

$$c_0 = a_0 * b_0, \quad c_1 = a_1 * b_0 + a_0 * b_1, \quad \dots, \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_{ij} * b_j$$

2.13.4 Satz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper

1. $\mathbb{K}[X]$ ist ein kommutativer Ring und $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X]$, die Teilmenge der Polynome mit Koeffizientenfolge $(a_0, 0, 0, \dots)$ ein Unterkörper.
2. $\mathbb{K}[X]$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation mit dem Unterkörper $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X]$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis $\{1, X, X^2, \dots\}$.

Diesen Satz haben wir im Rahmen der Übungen bereits bewiesen.
Die Elemente aus $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X]$ nennt man die konstanten Polynome.

2.13.5 Bezeichnung: Leitkoeffizient, Konstanter Term

Sei P ein Polynom vom Grad n und $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ seine Koeffizientenfolge. Dann heisst a_n der Leitkoeffizient und a_0 der konstante Term von P .

2.13.6

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus 0$ gilt (das Nullpolynom hat keinen Grad):

1. $\text{grad}(P + Q) \leq \max(\text{grad } P, \text{grad } Q)$
2. $\text{grad}(P * Q) = \text{grad } P + \text{grad } Q$. Genauer gilt: Ist a_n Leitkoeffizient von P und b_m Leitkoeffizient von Q , so ist $a_n * b_m$ Leitkoeffizient von $P * Q$.

Beweis

Der Beweis ist trivial

2.13.7

Sei $P \in \mathbb{K}[X]$. Dann definiert P durch einsetzen eine Abbildung

$$E_P: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, E_P(r) = \sum_{i=0}^n a_i r^i$$

falls $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Wir schreiben kürzer $P(r)$ für $E_P(r)$.

Wichtig für unsere Anwendungen ist das folgende Ergebnis mit seinen Folgerungen.

2.13.8 Division mit Rest

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $F = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ und $G = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$ mit $b_m \neq 0$ Polynome in $\mathbb{K}[X]$.

Dann gibt es Polynome $Q, R \in \mathbb{K}[X]$, so dass

$$F = Q * G + R \quad \text{mit } R = 0 \text{ oder } \text{grad } R < \text{grad } G$$

Beweis

Ist $n < m$, setzen wir $Q = 0$ und $R = F$. Sei also $n \geq m$. Wir beweisen diesen Teil durch Induktion nach n .

$n = 0$

$F = a_0, G = b_0$ (wegen $n \geq m$). Da $b_0 \neq 0$ nach Voraussetzung ($m = 0$), gilt mit $Q = \frac{a_0}{b_0}$: $F = a_0 = Q * G + 0$.

Induktionsschritt

Sei $Q_1 = \frac{a_n}{b_n} * X^{n-m}$

$$F = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$$

$$Q_1 * G = a_n X^n + \frac{a_n}{b_m} b_{m-1} X^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{b_m} b_0 X^{n-m}$$

$F - Q_1 * G = F_1$ ist ein Polynom vom Grad $\text{grad } F_1 < n$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Polynome $Q_2, R \in \mathbb{K}[X]$, so dass

$$F_1 = Q_2 * G + R \quad \text{mit } \text{grad } R < \text{grad } G \text{ oder } R = 0$$

Es folgt:

$$F = Q_1 * G + F_1 = (Q_1 + Q_2) * G + R$$

Setze $Q = Q_1 + Q_2$.

2.13.9 Definition: Nullstelle

Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Element $r \in \mathbb{K}$ heisst Nullstelle von P , wenn $P(r) = 0$.

2.13.10 Satz

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und $r \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[X]$, dann ist das lineare Polynom $X - r$ ein Teiler von P , d.h. es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{K}[X]$, so dass $P = Q * (X - r)$.

Beweis

Wir teilen P durch $X - r$ mit Rest

$$P = Q * (X - r) + R \quad \text{mit } R = 0 \text{ oder } \text{grad } R = 0$$

Im zweiten Fall ist R ein konstantes Polynom $R = c$ mit $c \neq 0$.

Nach Voraussetzung gilt $P(r) = 0$. Also

$$0 = P(r) = Q(r) * (r - r) + c = 0 + c$$

Also ist $c = 0$, d.h. $R = 0$.

2.13.11 Folgerung

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad n , so hat P höchstens n Nullstellen.

Beweis

Induktion nach n . Ist $n = 0$, so ist $P = a_0$ mit $a_0 \neq 0$. Also hat P keine Nullstelle.

Induktionsschritt

Sei r Nullstelle von P . Dann gibt es $Q \in \mathbb{K}[X]$ mit

$$0 = P(s) = Q(s) * (s - r)$$

Da $s - r \neq 0$ ist s Nullstelle von Q . Da $\text{grad } Q = \text{grad } P - 1 = n - 1$, hat Q nach Induktion höchstens $n - 1$ verschieden Nullstellen.

Besonders schön ist die Theorie der komplexen Polynome, denn es gilt

2.13.12 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$P = a_n * (X - \lambda_n) * (X - \lambda_{n-1}) * \dots * (X - \lambda_1) \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Für diese Resultat gibt es keinen rein algebraischen Beweis. Deshalb müssen wir im Rahmen dieser Vorlesung auf einen Beweis verzichten.

Der Fundamentalsatz der Algebra hat Konsequenzen für die Behandlung sowohl $\mathbb{C}$ als auch $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen, wie wir in dem kommenden Abschnitten sehen werden.

2.14 Trigonalisierbare Endomorphismen

Selbst wenn das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ in Linearfaktoren zerfällt, braucht f nicht diagonalisierbar zu sein. D.h. die Bedingung $\dim E(\lambda) = v_\lambda(P_f)$ ist nicht immer erfüllt.

2.14.1 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix von f bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_f = (x - 1)^2$ Damit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, 1 ist der einzige Eigenwert. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Eigenvektor zum einzigen Eigenwert 1, falls

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

d.h. wenn $v_2 = 0$. Damit ist $E(1) = \mathbb{R} \times 0 \subset \mathbb{R}^2$, also 1-dimensional. Wir fragen uns, was wir in einem solchen Fall erreichen können.

2.14.2 Definition: Trigonalisierbar

$f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heisst trigonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, so dass $M_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

2.14.3 Satz

$f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom P_f von f in Linearfaktoren zerfällt.

2.14.4 Satz

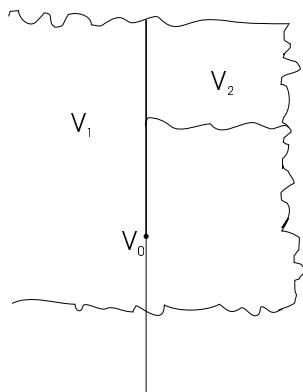
Ist V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, dann ist jeder $\mathbb{C}$ -Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar.

Wir schliessen mit einer "geometrischen" Interpretation der Trigonalisierbarkeit.

2.14.5 Definition: Fahne, f -Invariant

Eine Sequenz $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$ von Unterräumen eines n -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraums V heisst Fahne in V , wenn $\dim V_i = i$. Ist $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, heisst eine Fahne f -invariant, falls jedes V_i f -invariant ist.

Der Name "Fahne" ist suggestiv: $V_0 = \{0\}$ wird als Fusspunkt, $V_1 \cong \mathbb{K}$ wird als "Fahnenstange", $V_2 \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ als Fahnentuch interpretiert.

**2.14.6 Satz: Fahnensatz**

$f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit endlichdimensionalen V ist genau dann trigonalisierbar, wenn V eine f -invariante Fahne besitzt.

Kapitel 3

Vektorräume mit Skalarprodukt

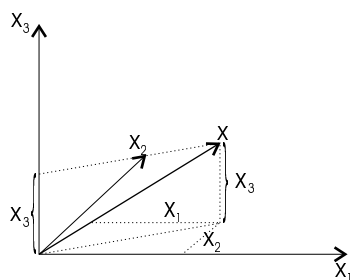
Für geometrische Betrachtungen im $\mathbb{R}^n$ hätte man gerne so etwas wie Längen- und Winkelbegriffe. Die Volumenform in 1.11 ist eine Betrachtung in diese Richtung. Wir greifen die dort aufgelisteten Axiome auf, um den bekannten Längen und Winkelbegriff des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^n$ zu erweitern.

3.15 Skalarprodukte

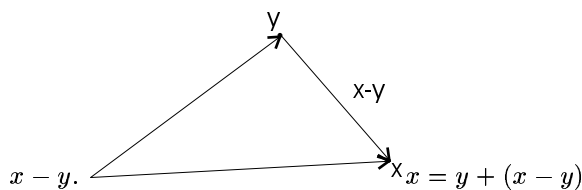
Sei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Die "Länge" von x ist der "Abstand" von x vom Nullpunkt. Nach dem Satz des Pythagoras gilt.

3.15.1 Satz: Satz des Pythagoras

$$\|x\| = \text{Länge von } x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

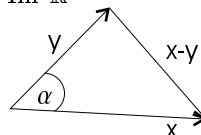


Betrachtet man zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^3$, so ist ihr Abstand die Länge des Vektors



Kommen wir nun zur Winkelmessung: Sei $a = \|x - y\|$, $b = \|y\|$, $c = \|x\|$

Im $\mathbb{R}^2$



Der Cosinussatz besagt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
Also $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - a^2 &= \|y\|^2 + \|x\|^2 - \|x - y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 \\ &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

Es folgt

3.15.2

$$\cos \alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Die Formeln 3.15.1 und 3.15.2 lassen sich nun in offensichtlicher Weise zu Längen- und Winkelmessungen im $\mathbb{R}^n$ erweitern. Dazu setzen wir

3.15.3 Definition: Euklidische- oder Standardskalarprodukt

Das Euklidische oder Standardskalarprodukt von x und y aus $\mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

3.15.4 Rechenregeln

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Bilinearform (vergleiche 1.11.6), d.h.
 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \langle r * x, z \rangle = r * \langle x, z \rangle$
 $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \langle x, r * z \rangle = r * \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, d.h. $\langle -, - \rangle$ ist symmetrisch
3. Für $x \neq 0$ gilt $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle > 0$, d.h. $\langle -, - \rangle$ ist positiv definit

Diese Regeln rechnet man leicht nach.

Schon zur bequemeren Behandlung von Untervektorräumen, aber auch für die Untersuchung allgemeiner Vektorräume, etwa Räumen von Funktionen, empfiehlt es sich, den Begriff des Skalarproduktes vom Standardbeispiel $\mathbb{R}^n$ auf beliebige Vektorräume auszudehnen. Dazu erhebt man (wie schon früher praktiziert) die grundlegenden Rechenregeln zu Definitionen. Damit wir 3.15.4.3 mit in eine solche Definition aufnehmen können, beschränken wir uns auf folgenden Fall.

3.15.5 Konvention

Falls nicht ausdrücklich anders vermerkt, ist $\mathbb{K}$ ab jetzt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3.15.6 Definition: Bilinearform, symmetrisch

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Eine Bilinearform auf V ist eine Multilinearform $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Eine Bilinearform f heisst symmetrisch, falls $f(v, w) = f(w, v)$.

Für $\mathbb{C}$ -Vektorräume ist man meist an anderen Formen interessiert.

3.15.7 Definition: Sesquilinearform, Semilinear, Hermitesch

Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine Funktion

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heisst Sesquilinearform (= "anderthalbfach linear"), wenn gilt:

1. f ist $\mathbb{C}$ -linear im ersten Argument, d.h. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
und $f(r * u, w) = r * f(u, w) \quad \forall u, v, w \in V, \forall r \in \mathbb{C}$.
2. f ist $\mathbb{C}$ -semilinear im zweiten Argument, d.h. $\forall u, v, w \in V, \forall r \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w) \quad , \quad f(u, r * v) = \bar{r} * f(u, v)$$

Eine Sesquilinearform f heisst hermitesch, wenn

$$f(u, v) = \overline{f(v, u)} \quad , \quad \forall u, v \in V$$

3.15.8

Ist f eine hermitesche Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum V , so gilt:

$$f(v, v) \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

Beweis

$$f(v, v) = f(\bar{v}, v), \text{ also ist } f(v, v) \in \mathbb{R}$$

3.15.9 Definition: Positiv definit, Euklidischer- oder Unitärer Vektorraum

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine hermitesche Sesquilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heisst positiv definit, falls $f(v, v) > 0, \forall v \neq 0$ aus V .

Ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Das Paar $(V, \langle -, - \rangle)$ heisst dann euklidischer ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. unitärer ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Vektorraum.

3.15.10 Beispiele

1. $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$ ist ein euklidischer Raum.
2. $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ ist ein unitärer Vektorraum
3. Sei $C([0, 1], \mathbb{K})$ der Vektorraum der stetigen Abbildungen

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$$

Dann ist

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f * \bar{g} \, dx$$

ein Skalarprodukt auf $C([0, 1], \mathbb{K})$. Hierbei ist

$$\bar{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}, \bar{g}(t) = \begin{cases} \overline{g(t)} & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ g(t) & \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass in allen Fällen die Axiome erfüllt sind.

Wegen Beispiel 1 und 2 haben wir ein Standardskalarprodukt auf jedem $\mathbb{K}^n$. Da jeder n -dimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorraum V isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist, kann man das Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle_{\mathbb{K}}$ mit Hilfe des Isomorphismus $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf V übertragen: Wir definieren

$$\langle -, - \rangle_{\varphi}: V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \langle v, w \rangle_{\varphi} = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle_{\mathbb{K}}$$

Die Axiome kann man "im Kopf" überprüfen. Wir erhalten

3.15.11 Satz

Jeder endlichdimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorraum besitzt ein Skalarprodukt.
 Bevor wir weitere Eigenschaften des Skalarproduktes untersuchen, wenden wir uns der Definition des Längenbegriffs zu.

3.15.12 Definition: Norm, Normierter Vektorraum

Eine Norm auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V ist eine Abbildung

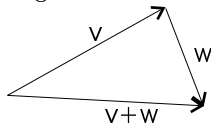
$$V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

so dass gilt:

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|r * v\| = |r| * \|v\|, \forall v \in V, \forall r \in \mathbb{K}$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heisst normierter Vektorraum.

Alle drei Axiome sind Bedingungen, die wir von einem vernünftigen Längenbegriff erwarten. Die Dreiecksungleichung ist für den üblichen euklidischen Längenbegriff in der Ebene sofort einsichtig:



Die folgende einfache Überlegung zeigt, dass nur positive Längen möglich sind.

3.15.13

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , dann gilt $\|v\| \geq 0$

Beweis

$$0 \stackrel{(1)}{=} \|v - v\| \stackrel{(3)}{\leq} \|v\| + \|-v\| \stackrel{(2)}{=} \|v\| + |(-1)| * \|v\| = 2 * \|v\|$$

Also $\|v\| \geq 0$.

3.15.14 Satz

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , dann wird durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V definiert, und es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für alle $u, v \in V$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| * \|v\|$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis

$\langle 0, v \rangle = \langle 0 * v, v \rangle = 0 * \langle v, v \rangle = 0$. Es folgt: $v = 0 \Rightarrow \|v\| = 0$. Weiter gilt: $\|v\| = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$, da $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

$$\|r * v\| = \sqrt{\langle r * v, r * v \rangle} = \sqrt{r * \bar{r} * \langle v, v \rangle} \stackrel{1.2.13}{=} |r| * \|v\|.$$

Wir beweisen weiter die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

Für $v = 0$ erhalten wir auf beiden Seiten 0. Sei also $v \neq 0$. Es gilt für $s = \|v\|^2 \in \mathbb{R}$ und $t = \langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle s * u - t * v, s * u - t * v \rangle = s * \bar{s} * \langle u, u \rangle - s * \bar{t} * \langle u, v \rangle - t * \bar{s} * \langle v, u \rangle + t * \bar{t} * \langle v, v \rangle \\ &= s^2 * \|u\|^2 - 2s * t * \bar{t} + t * \bar{t} * \|v\|^2 = s (\|v\|^2 * \|u\|^2 - 2|t|^2 + |t|^2) \\ &= s * (\|v\|^2 * \|u\|^2 - |\langle u, v \rangle|^2) \end{aligned}$$

Da $s = \|v\|^2 \neq 0$, folgt die Ungleichung.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $s * u - t * v = 0$. Da $s \neq 0$ sind u und v linear abhängig.

Sind umgekehrt u und v linear abhängig, gilt $u = r * v$, da $v \neq 0$. Also

$$|\langle u, v \rangle| = |r * \langle v, v \rangle| = |r| * \|v\|^2 = \|r * v\| * \|v\| = \|u\| * \|v\|$$

Es bleibt, die Dreiecksungleichung zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| * \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Denn ist $\langle u, v \rangle = a + bi$, so ist $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = a - bi$ und $|\langle u, v \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Also $\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Eine Norm erlaubt die Definition eines Abstandsbegriffes.

3.15.15 Definition: Abstand zweier Vektoren

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann nennen wir

$$\|v - w\|$$

den Abstand von v und w aus V (bezüglich $\|\cdot\|$)

3.15.16 Rechenregeln für den Abstand

Für $u, v, w \in V$ gilt

1. $\|u - v\| = 0 \iff u = v$
2. $\|u - v\| = \|v - u\|$
3. $\|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$ (Dreiecksungleichung)

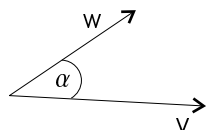
Diese Rechenregeln folgen sofort aus 3.15.12.

In einem euklidischen Raum können wir ein vernünftiges Winkelmaß einführen, indem wir 3.15.2 erweitern.

3.15.17 Definition: Winkelmass

Ist $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Raum, definieren wir als Mass des Winkels zwischen zwei Vektoren v, w :

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| * \|w\|}$$



Im unitären Fall ist $\langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ und ausserdem $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, so dass wir mit der Definition 3.15.17 wenig anfangen können. im Spezialfall $\langle v, w \rangle = 0$ ist das natürlich anders. in diesem Fall ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d.h. v und w stehen senkrecht aufeinander. Damit ist folgende Definition in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt sinnvoll.

3.15.18 Definition: Orthogonal, Orthogonales Komplement

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt

1. $v, w \in V$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Wir schreiben $v \perp w$.
2. $v \in V$ steht senkrecht auf einem Untervektorraum U , wenn $\langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U$. Wir schreiben $v \perp U$.
3. Zwei Untervektorräume $U, U_2 \subset V$ sind orthogonal zueinander, wenn $\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2$. Wir schreiben $U_1 \perp U_2$.
4. Für einen Untervektorraum $U \subset V$ heisst $U^\perp = \{v \in V ; v \perp U\}$ das orthogonale Komplement von U .

3.15.19 Satz

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt:

1. Ist $M \subset V$ eine nicht leere Teilmenge und

$$M^\perp = \{v \in V ; \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in M\}$$

dann ist $M^\perp$ ein Untervektorraum von V und $M^\perp = (\text{Span } M)^\perp$.

2. Ist $U \subset V$ Untervektorraum, dann ist die Summe $U + U^\perp$ direkt.
3. Ist $U \subset V$ Untervektorraum und $\dim V < \infty$, so ist $V = U \oplus U^\perp$.

Beweis

1. (a) $0 \in M^\perp$, so dass $M^\perp \neq \emptyset$.
 (b) $v^1, v^2 \in M^\perp \Rightarrow \langle v^1 + v^2, w \rangle = \langle v^1, w \rangle + \langle v^2, w \rangle = 0 + 0 = 0 \forall w \in M$. Also ist $v^1 + v^2 \in M^\perp$.

(c) $v \in M^\perp, r \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle r * v, w \rangle = r * \langle v, w \rangle = r * 0 = 0 \forall w \in M$.
Also ist $r * v \in M^\perp$.

Damit ist $M^\perp$ ein Untervektorraum. Da $M \subset \text{Span } M$, folgt $(\text{Span } M)^\perp \subset M^\perp$.

Sei nun $v \in M^\perp$ und $w = r_1 * w^1 + \dots + r_n * w^n \in \text{Span } M$, wobei $r_i \in \mathbb{K}$ und $w^i \in M$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n r_i * \langle v, w^i \rangle = 0$$

da $\langle v, w^i \rangle = 0 \forall i = 1, \dots, n$. Also ist $v \in (\text{Span } M)^\perp$.

2. Sei $v \in U \cap U^\perp$. Dann gilt $\langle v, v \rangle = 0$. Es folgt $v = 0$.
3. Stellen wir noch bis 3.15.25 zurück.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass V ein "rechtwinkliges Koordinatensystem" besitzt.

3.15.20 Definition: Orthogonal- und Orthonormalsystem, Orthogonal- und Orthonormalbasis

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt.
 $B = \{v^1, \dots, v^k\}$ heisst Orthogonalsystem in V , wenn

$$v^i \perp v^j \quad \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, n$$

Gilt ausserdem $\|v^i\| = \sqrt{\langle v^i, v^i \rangle} = 1$ für $i = 1, \dots, n$ heisst B Orthonormalsystem in V .

Ist B ausserdem noch Basis, spricht man von einer Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis.

3.15.21 Beispiel

Die Standardbasis ist eine Orthonormalbasis in $(\mathbb{K}, \langle -, - \rangle_{\mathbb{K}})$

Denn $\langle e^i, e^j \rangle_{\mathbb{K}} = \delta_{ij}$

Wir wollen jetzt ein Verfahren vorstellen, das aus einer gegebenen Basis eine Orthonormalbasis macht.

3.15.22 Der Gram-Schmidt Orthogonalisierungsprozess

Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren in V . Dann konstruieren wir induktiv ein Orthonormalsystem $\{u^1, \dots, u^n\}$, so dass

$$\text{Span}\{v^1, \dots, v^i\} = \text{Span}\{u^1, \dots, u^i\} \quad i = 1, \dots, n$$

$n = 1$

$v^1 \neq 0$. Setze $u^1 = \frac{v^1}{\|v^1\|}$. Dann gilt $\langle u^1, u^1 \rangle = \frac{1}{\|v^1\|^2} * \|v^1\|^2 = 1$.

Induktionsschritt

Sei $\{u^1, \dots, u^{n-1}\}$ ein Orthonormalsystem, so dass

$$\text{Span}\{v^1, \dots, v^i\} = \text{Span}\{u^1, \dots, u^i\} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1$$

Da $v^n \notin \text{Span}\{v^1, \dots, v^{n-1}\}$, ist

$$w = v^n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v^n, u^i \rangle * u^i \neq 0$$

Also ist $\|w\| \neq 0$, und wir setzen

$$u^n = \frac{w}{\|w\|}$$

Da $v^n \in \text{Span}\{u^1, \dots, u^{n-1}, w\}$, folgt $\text{Span}\{u^1, \dots, u^n\} = \text{Span}\{v^1, \dots, v^n\}$.
Weiter gilt: $\|u^n\| = 1$, und für $i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \langle u^n, u^i \rangle &= \frac{1}{\|w\|} * \langle v^n, u^i \rangle - \frac{1}{\|w\|} \sum_{j=1}^{n-1} \langle v^n, u^j \rangle * \underbrace{\langle u^j, u^i \rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \frac{1}{\|w\|} \langle v^n, u^i \rangle - \frac{1}{\|w\|} \langle v^n, u^i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Also ist $\{u^1, \dots, u^n\}$ ein Orthonormalsystem, wie gewünscht.

Als Folgerung erhalten wir.

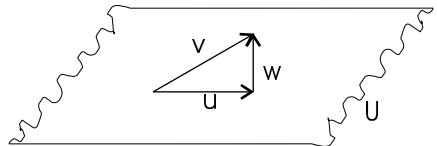
3.15.23 Satz

Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt. Dann lässt sich jedes Orthonormalsystem $\{u^1, \dots, u^k\}$ zu einer Orthonormalbasis ergänzen. insbesondere besitzt V eine Orthonormalbasis.

Wir benutzen diesen Satz, um einen einfachen Beweis von 3.15.19.3 nachzutragen.

3.15.24 Definition: Orthogonale Projektion

Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Ein Vektor $u \in U$ heisst orthogonale Projektion von $v \in V$ auf U , wenn es ein $w \in U^\perp$ gibt, so dass $v = u + w$.

**3.15.25 Lemma**

1. Sei $U \subset V$ Untervektorraum und $v \in V$. Dann gibt es höchstens eine orthogonale Projektion u von v auf U .

2. Ist U endlichdimensional und $\{u^1, \dots, u^k\}$ eine Orthonormalbasis von U , dann ist

$$u = \sum_{j=1}^k \langle v, u^j \rangle u^j \in U$$

orthogonale Projektion von v auf U .

Beweis

1. Sei $v = u^1 + w^1 = u^2 + w^2$ mit $u^1, u^2 \in U$, $w^1, w^2 \in U^\perp$. Wir müssen zeigen, dass $u^1 = u^2$. Es gilt, da $u^1 - u^2 \in U$ und $w^2 - w^1 \in U^\perp$

$$u^1 - u^2 = w^2 - w^1 \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

Also $u^1 - u^2 = 0$.

2. Sei $w = v - u$. Dann gilt:

$$\langle w, u^j \rangle = \langle v, u^j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, u^i \rangle \underbrace{\langle u^i, u^j \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle v, u^j \rangle - \langle v, u^j \rangle = 0$$

Also folgt:

$$w \in \{u^1, \dots, u^k\}^\perp = (\text{Span}\{u^1, \dots, u^k\})^\perp = U^\perp$$

Beweis von 3.15.19.3

Wir müssen zeigen:

$$V = U + U^\perp$$

Das folgt aber aus 3.15.25.2.

Zum Abschluss beweisen wir noch zwei Ergebnisse von eigenständigem Interesse.

3.15.26 Satz: Satz des Pythagoras

Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ ein Orthogonalsystem in V . Dann gilt:

$$\|v^1 + v^2 + \dots + v^n\|^2 = \|v^1\|^2 + \|v^2\|^2 + \dots + \|v^n\|^2$$

Beweis

$$\begin{aligned} \|v^1 + \dots + v^n\|^2 &= \langle v^1 + \dots + v^n, v^1 + \dots + v^n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v^i, v^j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v^i, v^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|v^i\|^2 \end{aligned}$$

weil $\langle v^i, v^j \rangle = 0$ für $i \neq j$.

3.15.27 Bessel'sche Ungleichung

Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ ein Orthonormalsystem in V . Dann gilt für alle $w \in V$

$$\sum_{i=1}^n |\langle w, v^i \rangle|^2 \leq \|w\|^2$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $w \in \text{Span}\{v^1, \dots, v^n\}$.

Beweis

Sei $u = \sum_{i=1}^n \langle w, v^i \rangle * v^i$ die orthogonale Projektion von w auf $U = \text{Span}\{v^1, \dots, v^n\}$. Dann ist $z = w - u \in U^\perp$, d.h. $z \perp \bar{u}$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$\|w\|^2 = \|z + u\|^2 = \|z\|^2 + \|u\|^2 = \|z\|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle w, v^i \rangle|^2$$

da

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle w, v^i \rangle * v^i, \sum_{j=1}^n \langle w, v^j \rangle * v^j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle w, v^i \rangle * \overline{\langle w, v^j \rangle} * \underbrace{\langle v^i, v^j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n |\langle w, v^i \rangle|^2 \end{aligned}$$

Gleichheit in der Bessel'schen Ungleichung gilt genau dann, wenn $z = 0$, d.h. wenn $w \in U$.

Anwendung

In 3.15.15 haben wir den Abstand zweier Elemente $v, w \in V$ durch $\|v - w\|$ definiert. Wir wollen nun den Abstand eines Elementes v von einem Untervektorraum U definieren.

3.15.28 Definition: Abstand von einem Vektor zu einem Untervektorraum

Sei $v \in V$ und U Untervektorraum von V . Dann heisst

$$d(v, U) = \min\{\|v - u\|; u \in U\}$$

der Abstand von v und U .

3.15.29 Satz

Ist $\dim U < \infty$, dann existiert $d(v, U)$. Es gilt

$$d(v, U) = \|v - u\|$$

wobei u die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Beweis

Nach 3.15.24 ist $v - u \in U^\perp$. Sei $w \in U$ und $z = w - u$. Dann ist $z \in U$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= \langle v - u - z, v - u - z \rangle = \langle v - u, v - u \rangle - \langle v - u, z \rangle - \langle z, v - u \rangle + \langle z, z \rangle \\ &= \|v - u\|^2 + \|z\|^2\end{aligned}$$

da $v - u \in U^\perp$ und $z \in U$. Für $z = 0$ haben wir damit das Minimum.

3.15.30 Methode der kleinsten Quadrate

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine Matrix vom Rang n und sei $m > n$. Dann ist das lineare Gleichungssystem

$$A * x = b \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nicht für jedes b lösbar. Zu vorgegebenem b wird ein $z \in \mathbb{K}^n$ gesucht, so dass

$$\|A * z - b\|$$

minimal wird.

$\{A * x ; x \in \mathbb{K}^n\} = f_A(\mathbb{K}^n) = \text{Span}\{s^1, \dots, s^n = U\}$, wobei s^j der j -te Spaltenvektor von A ist. Ist u die orthogonale Projektion von b auf U , so wird nach 3.15.29 das (eindeutige, da f_A injektiv ist) $z \in \mathbb{K}^n$ gesucht, für das $A * z = u$ ist.

Da $b - u \in U^\perp$, und $U = \text{Span}\{s^1, \dots, s^n\}$, gelten die Gleichungen

$$\langle b - u, s^j \rangle = 0 \quad \text{also} \quad \langle u, s^j \rangle = \langle A * z, s^j \rangle = \langle b, s^j \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

Da $\langle A * z, s^j \rangle = (A * z)^t * \bar{s}^j = z^t * A^t * \bar{s}^j$ und

$$A^t * \bar{s}^j = (\langle s^1, \bar{s}^j \rangle, \dots, \langle s^n, \bar{s}^j \rangle)$$

hat diese Gleichungssystem die Form

$$\sum_{i=1}^n \langle s^i, \bar{s}^j \rangle * z_i = \langle b, s^j \rangle \quad (*)$$

Damit ist $A^t * \bar{A}$ die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. Da

$$(\langle b, s^1 \rangle, \dots, \langle b, s^n \rangle)^t = (b^t * \bar{s}^1, \dots, b^t * \bar{s}^n)^t = (b^t * \bar{A})^t = \bar{A}^t * b$$

hat (*) die Matrixform

$$A^t * \bar{A} * z = \bar{A}^t * b \quad z = (A^t * \bar{A})^{-1} * \bar{A}^t * b$$

Da $\text{rg } A = n$ ist, ist $A^t * \bar{A}$ invertierbar (Aufgabe!), so dass z eindeutig ist.

3.16 Bilinearformen und Matrizen

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ und $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform. Da für $x \in \mathbb{R}$ stets $\bar{x} = x$ gilt, behandeln wir die Fälle parallel, indem wir die Beweise fuer die Sesquilinearform (Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) führen.

3.16.1

Sind $v = \sum_{i=1}^n x_i * v^i$ und $w = \sum_{j=1}^n y_j v^j$ zwei Vektoren in V , dann gilt

$$f(v, w) = \sum_{i=1}^n x_i * f(v^i, \sum_{j=1}^n y_j v^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i * \bar{y}_j * f(v^i, v^j)$$

Wir setzen

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n} \quad \text{mit } a_{ij} = f(v^i, v^j)$$

Dann folgt

$$f(v, w) = (x_1, \dots, x_n) * A * \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = x^t * A * \bar{y}$$

Hierbei fassen wir x und y als Spaltenvektoren auf und definieren

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \quad \text{für } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

3.16.2

A heisst Matrix von f bezüglich der Basis B . Wir schreiben $A = Q_B(f)$.

An Hand der Matrix A kann man sofort feststellen, wann f symmetrisch bzw. hermitesch ist.

3.16.3 Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ f eine Bi- bzw. Sesquilinearform auf V und $A = Q_B(f)$. Dann gilt:

1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: f ist symmetrisch $\iff A$ ist symmetrisch, d.h. $A = A^t$.
2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: f ist hermitesch $\iff A$ ist hermitesch, d.h. $\bar{A}^t = A$, wobei $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, falls $A = (a_{ij})$.

Beweis

f ist hermitesch $\Rightarrow a_{ij} = f(v^i, v^j) = \overline{f(v^j, v^i)} = (\bar{a}_{ij})$.

A hermitesch: Dann gilt min ten Bezeichnungen aus 3.16.1:

$$\begin{aligned} f(v, w) &= x^t * A * \bar{y} \stackrel{(*)}{=} (*\bar{y})^t * x = \bar{y}^t * A^t * x = \\ \overline{f(v, w)} &= \overline{y^t * A * \bar{x}} = \bar{y}^t * \bar{A} * x = f(v, w) \end{aligned}$$

Da $\bar{A}^t = A$, also $\bar{A} = A^t$.

3.16.4

Im Beweis haben wir in Gleichung (*) benutzt, dass für zwei Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ stets gilt}$$

$$x^t * y = \sum_{i=1}^n x_i * y_i = y^t * x$$

Jetzt bleibt nur noch zu klären, wie man $Q_B(f)$ ansieht, ob f positiv definit ist oder nicht. Unser erstes Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

3.16.5 Satz

Eine Symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) f auf einem n -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum V ist genau dann positiv definit, wenn V eine Basis B besitzt, so dass:

$$Q_B(f) = E_n$$

Beweis

Ist f positiv definit, so ist f ein Skalarprodukt $f(v, w) = \langle v, w \rangle$. Nach 3.15.24 besitzt V dann eine Orthonormalbasis $B = \{v^1, \dots, v^n\}$. Für diese gilt:

$$f(v^i, v^j) = \langle v^i, v^j \rangle = \delta_{ij}$$

Also $Q_B(f) = E_n$.

Sei umgekehrt B eine Basis von V , so dass $Q_B(f) = E_n$. Dann gilt nach 3.16.1 für $v = \sum_{i=1}^n x_i v^i$ ($B = \{v^1, \dots, v^n\}$).

$$f(v, v) = x^t * E_n * \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i * \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$$

falls $v \neq 0$.

Dieser Satz nützt recht wenig, weil wir nicht wissen, wie wir eine solche Basis finden können. Aber er hilft doch, Rückschlüsse auf die Form der Matrizen $Q_B(f)$

zu ziehen: Sind B und B' verschiedene Basen von V und ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der

Koordinatenvektor von v bezüglich B , dann ist nach 1.7

$$T * x \quad \text{mit } T = M_B^{B'}(\text{id})$$

der Koordinatenvektor von x bezüglich B' . Wir erhalten somit den Bezeichnungen aus 3.16.1

$$\begin{aligned} f(v, w) &= x^t * Q_B(f) * \bar{y} = (T * x)^t * Q_{B'}(f) * \overline{(T * y)} \\ &= x^t * T^t * Q_{B'}(f) * \bar{T} * \bar{y} \end{aligned}$$

Es folgt, indem man die Basisvektoren B einsetzt,

3.16.6 Transformationsformel

Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, f eine Bi- bzw. Sesquilinearform auf V , und sind B und B' zwei Basen von V , dann gilt

$$Q_B(f) = T^t * Q_{B'}(f) * \bar{T} \quad \text{mit } T = M_B^{B'}(\text{id})$$

3.16.7 Folgerung

Ist $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt auf einem n -dimensionalen Vektorraum V und ist B eine beliebige Basis, dann gilt für $A = Q_B(f)$:

1. A ist invertierbar
2. $D(A) > 0$, insbesondere ist $D A \in \mathbb{R}$.

Beweis

Sei B' eine Orthonormalbasis von V , und $T = M_B^{B'}(\text{id})$. Wir haben in 3.16.5 gesehen, dass $Q_{B'}(f) = E_n$. Aus 3.16.6 folgt:

$$A = T^t * \bar{T}$$

Da T invertierbar ist, sind auch T^t und $\bar{T}$ invertierbar: Wir erinnern uns daran, dass $\overline{r_1 * r_2} = \bar{r}_1 * \bar{r}_2$ und $\overline{r_1 + r_2} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$ für beliebige Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ gilt. Damit folgt für $B = T^{-1}$, $B^t = (T^t)^{-1}$ und $\bar{B} = \bar{T}^{-1}$. Aus dem gleichen Grund gilt: $D(\bar{T}) = \overline{D T}$. Es folgt:

$$D A = D(T^t * \bar{T}) = D(T^t) * D(\bar{T}) = D(T) * \overline{D(T)} = |D(T)|^2$$

Mit Hilfe dieser Folgerung können wir nun ein brauchbares Kriterium beweisen.

3.16.8 Definition: Positiv Definit

Eine hermitesche (bzw. symmetrische) Matrix A aus $\mathbb{C}^{n,n}$ (bzw. $\mathbb{R}^{n,n}$) heisst positiv definit, wenn die Sesquilinearform (Bilinearform)

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto x^t * A * \bar{y} \quad (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$$

psotiv definit ist, d.h. wenn für $x \neq 0$ gilt $x^t * A * \bar{x} > 0$.

3.16.9 Satz: Hauptminorenkriterium

Sei $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bi- oder Sesquilinearform auf dem n -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum V und B eine Basis von V . Sei $A = Q_B(f) = (a_{ij})$. Dann gilt:
 f ist positiv definit $\iff A$ positiv definit $\iff D A_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$,
wobei $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$.

Beweis

(f positiv definit $\iff A$ positiv definit) folgt aus 3.16.1.

Beachte

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Sei A positiv definit und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^k$. Wir ergänzen x durch Nullen zu einem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Ist $x \neq 0$, so ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Also:

$$x^t * A_k * \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^T * A * \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

Also ist A_k positiv definit und damit $D A_k > 0$ 3.16.7.

Sei umgekehrt $D A_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$. Wir zeigen induktiv, dass A_k positiv definit ist.

Anfang

$k = 1$, $A_1 = (a_{11})$, $D A_1 = a_{11} > 0$ und $x_1 * a_{11} * x_1 = a_{11} x_1^2 > 0$, falls $x_1 \neq 0$

Induktionsschritt

Sei $k > 1$ und A_{k-1} positiv definit. Wir zeigen, dass auch A_k positiv definit ist. Da A_{k-1} ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{k-1}$ definiert, gibt es nach 3.15.24 eine Orthonormalbasis $B' = \{w^1, \dots, w^{k-1}\}$ von $\mathbb{K}^{k-1}$, d.h.

$$(w^i)^t * A_{k-1} * \bar{w}_j = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq k-1$$

Wir betrachten die Form

$$f: \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}, (u, v) \mapsto u^t * A_k * \bar{v}$$

Sei $v^j = \begin{pmatrix} w^j \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, d.h. wir machen aus w^j einen Vektor in $\mathbb{K}^k$, indem wir die k -te Komponente 0 hinzufügen. Sei $\langle -, - \rangle_{\mathbb{K}}$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{K}^k$. Dann ist $B = \{v^1, \dots, v^{k-1}, w\}$ mit $w = e^k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle z^k, v^j \rangle v^j$ eine Basis. Hier ist e^k der k -te Einheitsvektor und z^k der k -te Zeilenvektor von A_k . Wir berechnen $Q_B(f)$. Da $v^j = \begin{pmatrix} w^j \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt offensichtlich

$$f(v^i, v^j) = (v^i)^t * A_k * \bar{v}_j = (w^i)^t * A_{k-1} * \bar{w}^j = \delta_{ij}$$

Weiter gilt

$$w^t * A_k * \bar{v}^i = (z^k)^t * \bar{v}^i - \sum_{j=1}^{k-1} \langle z^k, v^j \rangle_{\mathbb{K}} * \underbrace{(v^j)^t * A_k * \bar{v}^i}_{\delta_{ij}} = \langle z^k, v^i \rangle_{\mathbb{K}} - \langle z^k, v^i \rangle_{\mathbb{K}} = 0$$

Da $Q_B(f)$ hermitesch (bzw. symmetrisch) ist, gilt

$$Q_B(f) = \begin{pmatrix} & & & \vdots & 0 \\ & E_{k-1} & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & \end{pmatrix} \quad \text{mit } c = f(w, w)$$

Beachte nun, dass f bezüglich der Standardbasis s durch A_k beschrieben wird. Ist $T = M_B^s(\text{id})$, so gilt $Q_B(f) = T^t * A_k * \bar{T}$. Also (vergleiche Beweis 3.16.7

$$c = D Q_B(f) = D A_k * |D T|^2 > 0$$

Setzen wir $v^k = \frac{1}{\sqrt{c}}$, so ist f bezüglich der Basis $\{v^1, \dots, v^k\}$ durch E_k gegeben. Also ist f nach 3.16.5 positiv definit.

Um noch mehr über die Matrizen $Q_B(f)$ einer symmetrischen Bilinearform oder hermiteschen Sesquilinearform zu erfahren wenden wir die Eigenwertergebnisse auf den Endomorphismus

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto Q_B(f) * x$$

an.

3.16.10 Satz

Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und damit jede reelle symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte (D.h. das charakteristische Polynom hat nur reelle Nullstelle).

Beweis

Wir fassen A im reellen, wie im komplexen Fall als komplexe Matrix auf. Sei also $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert und $v \neq 0$ aus $\mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} * \langle v, v \rangle &= \langle v, \lambda * v \rangle = \langle v, A * v \rangle = v^t * \overline{A * v} = v^t * \bar{A} * \bar{v} \\ \lambda * \langle v, v \rangle &= \langle \lambda * v, v \rangle = (A * v)^t * \bar{v} = v^t * A^t * \bar{v} \end{aligned}$$

Da A hermitesch ist, gilt $\bar{A} = A^t$, also $\lambda * \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} * \langle v, v \rangle$. Da $\langle v, v \rangle \neq 0$, folgt

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

Wir kommen nun zu einem für zahlreiche Anwendungen in der Physik wichtigem Ergebnis

3.16.11 Satz

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine symmetrische ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Matrix ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann besitzt $\mathbb{K}^n$ eine bezüglich des Standardskalarproduktes $\langle -, - \rangle$ orthogonale Basis aus Eigenvektoren von A . Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Beweis

Sei $f = f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wir zeigen nun induktiv:

Jeder k -dimensionale f -invariante Untervektorraum U von $\mathbb{K}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A .

Mit $k = n$ ist der Satz damit bewiesen.

$k = 1$: $U = \text{Span}\{u\}$. Da U f -invariant ist, ist u Eigenvektor von f , und $\frac{u}{\|u\|}$ hat die Länge 1.

Induktionsschritt

Sei U k -dimensionaler f -invarianter Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$. Dann können wir die Einschränkung g auf U als Endomorphismus von U auffassen:

$$g = f|_U: U \rightarrow U, u \mapsto f(u)$$

Jeder Eigenwert von g ist natürlich auch Eigenwert von f .

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra 2.13.12 hat das charakteristische Polynom von g mindestens eine (komplexe) Nullstelle, also g einen komplexen Eigenwert λ . Nach 3.16.10 ist λ sogar reell. Sei $u \in U$ ein Eigenvektor zu λ . Wir wählen u so, dass $\|u\| = 1$. Sei V das orthogonale Komplement von u in U , d.h.

$$V = \{v \in U; \langle v, u \rangle = 0\}$$

Dann gilt $\dim V = k - 1$. Weiter gilt für jedes $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle f(v), u \rangle &= \langle A * v, u \rangle = (A * v)^t \bar{u} = v^t * A^t * \bar{u} = v^t * \bar{A} * \bar{u} \\ &= v^t * \overline{A * u} = v^t * \overline{\lambda * u} = \lambda * \langle v, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

Also ist $f(v) \in V$ und damit V f -invariant.

Nach Induktionsannahme besitzt V eine Orthonormalbasis $\{v^1, \dots, v^{k-1}\}$ aus Eigenvektoren. Damit ist $\{v^1, \dots, v^{k-1}, u\}$ eine Orthonormalbasis von U aus Eigenvektoren.

Für beliebige endlichdimensionale Vektorräume V gilt ein ähnlicher Satz. Da wir auf V aber kein kanonisches Skalarprodukt haben, können wir nicht eine geeignete Orthonormalbasis erwarten.

3.16.12 Die Hauptachsentransformation

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Für alle Basen B von V haben die Matrizen $Q_B(f)$

- (a) denselben Rang
- (b) dieselbe Anzahl p von Eigenwerten $\lambda > 0$
- (c) dieselbe Zahl q von Eigenwerten $\lambda < 0$

2. V besitzt eine Basis B , so dass $Q_B(f)$ folgende Diagonalgestalt hat: HIER FEHLEN RECHTS DIE KLAMMERN AN DER GROSSEN MATRIX

$$Q_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis

IST SEHR LÄNGLICH KOMMT NOCH

3.16.13 Ergänzung

Im Falle $V = \mathbb{K}^n$ kann man erreichen, dass die Basis B im Teil 2 eine Othonormalbasis ist.

3.16.14 Folgerung

Eine symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ auf einem n -dimensionalen $\mathbb{K}$ Vektorraum V ist genau dann positiv definit, wenn $Q_B(f)$ nur Eigenwerte $\lambda > 0$ besitzt. Dabei ist B eine beliebige Basis von V .

Beweis

Sei $B = \{w^1, \dots, w^n\}$ eine Basis von V , für die 3.16.12 gilt, d.h.

$$Q_N(f) = \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ die zugehörige Zerlegung von V . Da $f(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ aus V^+ und $f(v, v) \leq 0$ für alle $v \in V^- \oplus V^0$, müssen wir zeigen, dass $V = V^+$, d.h. dass $n = p$. Nach Konstruktion bedeutet das, dass f keine Eigenwerte ≤ 0 besitzt, denn dann ist $\dim(V^+ \oplus V^0) = 0$

3.17 Orthogonale und unitäre Abbildungen

$(V_1, \langle -, - \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$ seien $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Es seien $\|-\|_1$ und $\|-\|_2$ die zugehörigen Normen. Wir wollen skalarprodukterhaltende Abbildungen studieren.

3.17.1 Definition: isometrisch, Isometrie

Eine Abbildung $f: V_1 \rightarrow V_2$ heisst isometrisch, wenn

$$\langle f(v), f(w) \rangle_2 = \langle v, w \rangle_1 \quad \forall v, w \in V_1$$

Ist f ausserdem bijektiv, nenn wir f eine Isometrie.

Wenn wir Abbildungen dieser Art studieren, sollten sie die gesamte Struktur erhalten, also auch die Vektorraumstrukturen. D.h. wir sollten genauer fordern, dass f $\mathbb{K}$ -linear ist. Das folgt aber bereits aus der Bedingung, dass f Skalarprodukte erhält

3.17.2 Satz

3.17.3 Folgerung

3.17.4 Satz

3.17.5 Lemma

3.17.6 Satz

3.17.7 Definition: Unitär, Orthogonal

3.17.8 Definition: Unitäre Matrix, Orthogonale Matrix

3.17.9 Satz

3.17.10 Lemma

3.17.11 Lemma

3.17.12 Satz

3.17.13

3.17.14 Satz

3.17.15

3.17.16 Definition: Gruppe, Abelsch, Kommutativ

3.17.17 Satz

3.17.18 Weitere Beispiele

3.17.19 Satz und Definition

Index

- f -invariant
 - Definition, 88, 99
- euklidischer Vektorraum, 104
- Abbildung
 - alternierende multilineare, 79
 - Einfache Eigenschaften, 40
 - Injektive, 42
 - lineare, 40
 - linksinvers, 18
 - rechtsinvers, 18
- Abstand
 - Definition, 106, 111
 - Rechenregeln, 106
- Adjungierte Matrix, 85
- alternierende n -Form, 80
- Basis
 - Definition, 31
 - kanonische, 34
 - orthogonale, 108
 - orthonormale, 108
- Basisaustauschsatz, 33
- Basisauswahlsatz, 33
- Basisergänzungssatz, 32
- Besselsche Ungleichung, 111
- bijektiv, 18
- Bild, 18
 - Definition, 42
- Bilinearform
 - Definition, 103
 - symmetrische, 103
- Blockmatrix, 89
- Cauchy Schwarzsche Ungleichung, 105
- charakteristisches Polynom, 92
- Corang
 - Definition, 43
- Cosinussatz, 102
- Cramer'sche Regel, 86
- Determinante
 - Berechnung, 86
 - Definition, 77
 - Eindeutigkeit, 78
 - multiplikativ, 84
- diagonalisierbar, 90
- Diagonalmatrix, 90
- Differenzmenge, 18
- Dimension
 - Definition, 32
- Dreiecksungleichung, 105
- Eigenraum, 90
- Eigenvektor, 90
- Eigenwert, 90
- Erzeugendensystem
 - Definition, 27
- euklidisches Skalarprodukt, 103
- Fahne, 99
- Fahmensatz, 100
- Fundamentalsatz der Algebra, 98
- Gleichungssystem
 - Dreiecksform, 14
 - Erlaubte Manipulationen, 14
 - homogenes, 19
 - inhomogenes, 19
 - Lösbarkeitskriterium, 14
 - Lösungsverfahren, 14
 - reduziertes, 14
- Gleichungssystem lineare
 - Definition, 14
- Gram-Schmidt Orthogonalisierungsprozess, 108
- Gruppe, 120
 - abelsche, 120
 - kommutative, 120
- Hauptachsentransformation, 118
- Hauptminorenkriterium, 115
- Hermitesch

- Definition, 103
- homogen, 14
- Identität, 18
- Induktionsprinzip, 38
- inhomogen, 14
- injektiv, 18
- Invariant
 - Definition, 88
- Isomorphismus
 - Definition, 41
- Isometrie, 120
- isometrisch, 120
- Isomorphismus
 - linearer, 41
- Körper
 - Definition, 15
 - Rechenregeln, 16
- Körpererweiterung
 - Definition, 16
- Körpertheorie, 15
- kanonische Basis, 34
- Kern
 - Definition, 42
- Koeffizientenfolge, 95
- Komplement
 - orthogonales, 107
- Komplementärraum, 89
- Komposition, 18
- Konstanter Term, 96
- Lösungsmenge, 14
- Leistungsverrechnung, 14
- Leitkoeffizient, 96
- Linearfaktor, 94
- Logische Zeichen, 16
- Matrix
 - adjungierte, 85
 - orthogonale, 120
 - unitäre, 120
- Matrizen
 - Addition, 51
 - Multiplikation, 51
 - Skalarmultiplikation, 51
- Methode der kleinsten Quadrate, 112
- Multilinear, 78
- Multilinearform, 78, 80
- multiplikativ, 84
- Norm
 - Definition, 105
- normierter Vektorraum, 105
- Nullstelle, 97
- Orthogonal, 107, 120
- Orthogonalbasis, 108
- Orthogonale Projektion, 109
- Orthogonales Komplement, 107
- Orthogonalisierungsprozess nach Gram-Schmidt, 108
- Orthogonalsystem, 108
- Orthonormalbasis, 108
- Orthonormalsystem, 108
- Parallelotop
 - Volumen, 76
- Permutation
 - Definition, 80
 - Vorzeichen, 80
- Polynom
 - Addition, 95
 - charakteristisches, 92
 - Definition, 95
 - Grad, 95
 - Koeffizientenfolge, 95
 - konstanter Term, 96
 - konstantes, 96
 - Leitkoeffizient, 96
 - Linearfaktor, 94
 - Multiplikation, 95
 - Nullstelle, 97
- Polynomaddition, 95
- Polynommultiplikation, 95
- Positiv definit
 - Definition, 104, 115
- Projektion
 - orthogonale, 109
- Pythagoras
 - Satz des, 102, 110
- Rang
 - Definition, 43
- Rechenregeln
 - Summenzeichen, 20
 - Vektorraum, 22
- Ring
 - Definition, 47
 - kommutativer, 47
- Satz des Pythagoras, 102, 110

- Semilinear
 - Definition, 103
- Sesquilinearform
 - Definition, 103
- Skalarprodukt
 - euklidisches, 103
 - Rechenregeln, 103
 - Standard, 103
- Span
 - Definition, 26
- Spur, 92
- Standardbasis, 34
- Standardskalarprodukt, 103
- Summe, direkte, 28
- Summenzeichen
 - Definition, 19
 - Rechenregeln, 20
- Superpositionsprinzip, 19
- surjektiv, 18

- Teilebedarfsrechnung, 14
- Transformationsformel, 115
- Trigonalisierbar, 99

- Umkehrabbildung, 18
- Unitär, 120
- unitärer Vektorraum, 104
- Unterkörper
 - Definition, 16
- Untervektorraum
 - Definition, 25
 - invariant, 88
- Urbildmenge, 18

- Vektorraum, 19
 - Definition, 23
 - euklidischer, 104
 - normierter, 105
 - unitärer, 104
- Volumenfunktion, 76
 - gewünschte Eigenschaften, 76
 - orientierte, 77
- Vorzeichen
 - Permutation, 80

- Winkelmaß, 107